第7卷 第4期　　高能物理与核物理　　Vol. 7, No. 4
1983年7月　　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　　July, 1983

关于 'tHooft 限制性条件的一点讨论

东方晓　　石景坚　　杜东生
（中国科学院高能所）　（河北大学）　（中国科学院高能所）

摘　　要

本文对 'tHooft 条件作了一些修改，要求复合费米子波函数全反对称．发现超色群为 $SU(3)\otimes SU(3)$ 时，可以找到一组整数的 index 解．

夸克轻子结构是当前大家很感兴趣的问题之一．到目前为止，已经提出了不少复合夸克轻子模型[1]．不过这里有一个重要的动力学问题还没解决，即如何由亚夸克(subquark or preon）构成质量几乎为零的（与亚夸克囚禁长度的倒数相比）夸克和轻子．为了克服这一困难，'tHooft 提出了一种所谓 metacolor 理论[2]．在这个理论中，'tHooft 提出了建立复合粒子模型的两个条件：第一，复合粒子层次即夸克轻子层次的 Adler 反常等于亚夸克层次的 Adler 反常，通常称 'tHooft 反常条件；第二，假设有一个亚夸克获得质量，质量项就把味道群 G_F 破缺到 $G'_F\subset G_F$，这就会给复合粒子所填的味道群 G_F 的表示的 Index 一些限制，通常称退耦条件．'tHooft 本想利用这两个条件，把复合粒子填充表示的 Index 完全确定下来．但是他发现除了超色群为 $SU(3)$，味道群为 $SU(2)$ 之外，没有整数 Index 解．也就是说，这样一个美妙的想法，无法用一个现实模型来实现． Weinberg[3]研究后指出，'tHooft 反常条件是很好的，而退耦条件是不必要的．他去掉退耦条件，提出了超色群为 $SU(5)$ 的模型．

本文目的是利用 Gatto[4] 等人的观点，重新考虑 'tHooft 的 metacolor 理论．

首先引入亚夸克 Q_L 和 Q_R，下标 L 和 R，分别代表左手态和右手态，假定它们都是无质量的费米子，超色群是 $G_{hc}=SU(N)$，N 为奇数；味道群是 $G_F=SU(n)_L\times SU(n)_R\times U(1)_V$，洛伦兹群可以写为 $SL(2,c)\sim SU(2)_L\times SU(2)_R$；无质量费米子的左（右）手态完全由洛伦兹群决定．并令亚夸克作如下填充：

	$SU(N)$	$SU(n)_L\times SU(n)_R$	$SU(2)_L\times SU(2)_R$	
Q_L	$\square$	$\square\ \cdot$	$\square\ \cdot$	(1)
Q_R	$\square$	$\cdot\ \square$	$\cdot\ \square$	

按照 Gatto 等人的观点，Q_L 和 Q_R 是同一粒子的不同状态，由它们构成的束缚态应满足统计性的要求，比如费米子束缚态波函数是全反对称的．但 'tHooft 在考虑复合粒子的表示时，没有考虑这种对称性的要求，而是把所有可能的不同构形全写下来．吴丹迪[5]也研究过对称性对复合粒子波函数的限制，不过他只讨论了相同手征态之间的对称性．按照 Gatto 等人的观点，我们这里不仅考虑统计的限制，同时也考虑不同手征态之间对称性的限制．

本文 1982 年 9 月 2 日收到

假设在 $\Lambda_{hc} \gg \Lambda_c = 500\text{MeV}$，超色发生凝聚，亚夸克束缚态都是不带超色的 $SU(N)$ 单态．如果超色群是 $SU(3)_{hc}$，那么费米子束缚态将由三个亚夸克组成的超色单态构成．我们要求费米子束缚态波函数是完全反对称的．(因费米子应遵从费米统计)而这种波函数应由空间、超色空间、味道空间和自旋空间等几部分组成。现在超色空间波函数是全反对称的，如果假设空间波函数处在 S 态——即全对称的，那么就要求味道、自旋空间波函数是全对称的，用杨图表示为$\begin{array}{|c|c|c|}\hline\ &\ &\ \\\hline\end{array}$．首先将杨图 $\begin{array}{|c|c|c|}\hline\ &\ &\ \\\hline\end{array}$ 对 $G_F \times SL(2,c)$ 做"外积"

分解：

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline\ &\ &\ \\\hline\end{array} \to \left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline\ &\ &\ \\\hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline\ &\ &\ \\\hline\end{array}\right) + \left(\begin{array}{|c|c|}\hline\ &\ \\\hline \multicolumn{1}{|c|}{\ } & \multicolumn{1}{c}{} \\\cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline\ &\ \\\hline \multicolumn{1}{|c|}{\ } & \multicolumn{1}{c}{} \\\cline{1-1}\end{array}\right) + \left(\begin{array}{|c|}\hline\ \\\hline\ \\\hline\ \\\hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline\ \\\hline\ \\\hline\ \\\hline\end{array}\right) \tag{2}$$

紧接着对(2)式中 G_F 和 $SL(2,c)$ 的杨图分别对 $SU(n)_L \times SU(n)_R$ 和 $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 做"直和"分解，考虑到三个亚夸克组成的左手束缚态只有两种可能的组合，$Q_LQ_LQ_L$ 和 $Q_LQ_RQ_R$，则有：

$$\begin{array}{cc} SU(n)_L\ SU(n)_R & SU(2)_L\ SU(2)_R \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline\ &\ &\ \\\hline\end{array} \to \left(\left(\begin{array}{|c|c|}\hline\ &\ \\\hline \multicolumn{1}{|c|}{\ } & \multicolumn{1}{c}{} \\\cline{1-1}\end{array}, \quad \cdot \quad\right), \left(\begin{array}{|c|c|}\hline\ &\ \\\hline \multicolumn{1}{|c|}{\ } & \multicolumn{1}{c}{} \\\cline{1-1}\end{array}, \quad \cdot \quad\right)\right) \text{ 对于 } Q_LQ_LQ_L \tag{3}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline\ &\ &\ \\\hline\end{array} \to \left(\left(\square, \begin{array}{|c|}\hline\ \\\hline\ \\\hline\end{array}\right) + \left(\square, \begin{array}{|c|c|}\hline\ &\ \\\hline\end{array}\right), \left(\square, \begin{array}{|c|}\hline\ \\\hline\ \\\hline\end{array}\right)\right) \quad \text{对于 } Q_LQ_RQ_R \tag{4}$$

在推导(3)式和(4)式时，要考虑到不存在自旋大于 $\frac{1}{2}$ 的无质量费米子这样一个事实．从(3)式和(4)式不难看出，对于超色群为 $SU(3)_{hc}$ 的情况，复合粒子可有下列表示：

$$\begin{array}{l}
\left(\begin{array}{|c|c|}\hline L & L \\\hline \multicolumn{1}{|c|}{L} & \multicolumn{1}{c}{} \\\cline{1-1}\end{array}, \quad \cdot \quad\right) l_1 \quad \left(\quad \cdot \quad, \begin{array}{|c|c|}\hline R & R \\\hline \multicolumn{1}{|c|}{R} & \multicolumn{1}{c}{} \\\cline{1-1}\end{array}\right) - l_1 \\
\left(\boxed{L}, \begin{array}{|c|c|}\hline R & R \\\hline\end{array}\right) l_2 \quad \left(\begin{array}{|c|c|}\hline L & L \\\hline\end{array}, \boxed{R}\right) - l_2 \\
\left(\boxed{L}, \begin{array}{|c|}\hline R \\\hline R \\\hline\end{array}\right) l_3 \quad \left(\begin{array}{|c|}\hline L \\\hline L \\\hline\end{array}, \boxed{R}\right) - l_3
\end{array} \tag{5}$$

式中 l_i 代表各种复合费米子表示左手多重态的数目与右手多重态数目之差，就是前面所提到的 index．因为左右对称性，当左右互换时，这些 l_i 改变符号．根据(5)式，'tHooft 反常条件为：

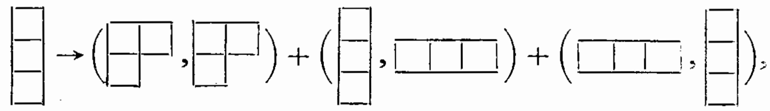
$$\begin{array}{ll} (n^2-9)l_1 - 1/2n(n+7)l_2 - 1/2n(n-7)\ l_3 = 3 & n > 2 \\ (n^2-3)l_1 - 1/2n(n+3)l_2 - 1/2n(n-3)\ l_3 = 1 & n > 1 \end{array} \tag{6}$$

而退耦条件为：$l_1 - l_2 = 0$；　$l_1 - l_3 = 0$　　(7)

很容易看出，方程(6)和(7)是没有整数 index 解的，不管 n 为任何正整数．

即使像 Weinberg 那样，不要退耦条件 (7)，只考虑反常条件 (6)，也只是对 $n=2$ 有解：　$l_1 = 5$　$l_2 = 3$　$l_3 = 11$．　或　$l_1 = -3$，$l_2 = -2$，$l_3 = -6$．

如果超色群不是单纯群，比如我们考虑半单群[6] $G_{hc} = SU(3) \times SU(3)$[注]，这样超色空间波函数就不再是全反对称的了，相反，这时是全对称的．如果空间波函数仍然取 S 波，那么味道自旋空间波函数便只好取全反对称的了，用杨图表示为$\begin{array}{|c|}\hline\ \\\hline\ \\\hline\ \\\hline\end{array}$，和(2)式一样进行分解：

　　(8)

这种情况下我们发现，复合粒子可取的表示仍然和(5)式完全一样，不过这时的 'tHooft 反常条件和(6)式略有不同，即：

$$
\begin{aligned}
&(n^2-9)l_1-\frac{1}{2}\,n(n+7)l_2-\frac{1}{2}\,n(n-7)l_3=9\\
&(n^2-3)l_1-\frac{1}{2}\,n(n+3)l_1-\frac{1}{2}\,n(n-3)l_3=3
\end{aligned}
\tag{9}
$$

而退耦条件却和(7)式完全一样．由(7)式便有，$l_1=l_2=l_3=k$　　(10)

这里 k 是任意整数．从(9)式和(10)式我们发现，只要 $k=-1$，n 为任何正整数，反常条件(9)都能满足．也就是说，对于半单纯群 $SU(3)\times SU(3)$ 做为超色群情况，我们找到一组解：

$$l_1=l_2=l_3=-1 \tag{11}$$

对任何的味道群 $SU(n)$ 都成立．

我们还用上述方法研究了超色群是 $SU(5)$ 的情况，结论是否定的． 不管是单纯群 $SU(5)$，还是半单纯群 $SU(5)\times SU(5)$，只要考虑退耦条件，就没有整数的 index 解．

参　考　文　献

[1] H. Harari, Talk given at SLAC Summer Institute on Particle Physics (1981) and references therein; H. Terazawa, *Phys. Rev.*, **D22**(1980), 184 and references therein.

[2] G. 'tHooft, Cargese Summer Institute Lectures (1979).

[3] S. Weinberg, *Phys. Lett.*, **102B**(1981), 401.

[4] R. Gatto, et al., *Phys. Lett.*, **93B**(1980), 47.

[5] Dan-di Wu, Harvard University Preprints HUTP-81/A001.

[6] Seiichiro. Takeshita, et. al., *Progress of Theoretical Physics*, **66**(1981), 2221.

SOME DISCUSSION ON' tHOOFT'S CONDITION

DONG FANG-XIAO*　SHI ZUI-JIAN+　TU TUNG-SHENG*

*(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

+(*Hebei University*)

ABSTRACT

We propose some alterations for the 'tHooft's conditions and find a set of integer solution of index if the hypercolor gauge group is $SU(3)\otimes SU(3)$.

注：文献[6]讨论过半单纯群的情况，不过他和 'tHooft 一样，没有考虑波函数的对称性．我们和文献[6]不同，把左手态和右手态看做全同粒子，复合粒子(夸克和轻子)整体波函数由于费米统计要求，必须是全反对称的．