第 6 卷 第 6 期 高能物理与核物理 Vol. 6, No. 6
1982 年 11 月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Nov., 1982

双例外原子 $(\pi^{\pm}\mu^{\mp})$ 的四体衰变

宋 孝 同
(杭 州 大 学)

摘 要

本文利用复合粒子量子场论的微扰展开方法计算了双例外原子 $(\pi^{\pm}\mu^{\mp})$ 的四体衰变的几率，并与自由 μ 衰变作了比较.

一、$(\pi^{\pm}\mu^{\mp})\to\pi^{\pm}+e^{\mp}+\nu_e+\nu_\mu$ 的 S 矩阵元

设初态双例外原子 $B(\pi^{\pm}\mu^{\mp})$ 质心的四维动量为 p_B，则

$$p_B = p_{\pi^+} + p_{\mu^-} \tag{1}$$

而在 B 内部，π^+ 与 μ^- 的相对四动量为

$$p = \mu_b p_{\pi^+} - \mu_a p_{\mu^-} \tag{2}$$

其中

$$\mu_a = \frac{m_\pi}{m_\pi + m_\mu},\quad \mu_b = \frac{m_\mu}{m_\pi + m_\mu}.$$

按照复合粒子量子场论的微扰展开[1]，上述衰变过程的 S 矩阵元可写为(见图 1)

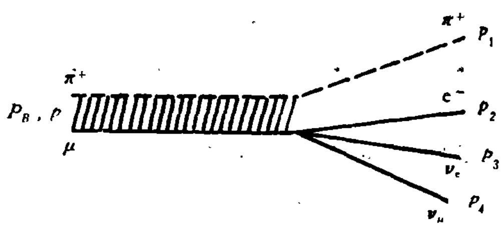

图 1

$$\langle f|S-1|i\rangle = \langle e^-\bar{\nu}_e\nu_\mu\pi^+|S-1|B(\pi^+\mu^-)\rangle$$
$$= \frac{-iG_F}{\sqrt{2}}(2\pi)^4\delta(p_B-p_1-p_2-p_3-p_4)\sqrt{\frac{m_e m_{\nu_e} m_{\nu_\mu} m_B}{2\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_B}}\,M \tag{3}$$

其中不变矩阵元 M 为

$$M = \bar{u}_e(p_2)\gamma_\rho(1+\gamma_5)v_{\nu_e}(p_3)\bar{u}_{\nu_\mu}(p_4)\gamma_\rho(1+\gamma_5)\chi_{p_B}(p_1-\mu_a p_B)\cdot(p_1^2+m_\pi^2) \tag{4}$$

$\chi_{p_B}(p)$ 是 $(\pi^+\mu^-)$ 系统的相对论性 $B.S.$ 波函数，它的表示式已由 [2] 求出，对于基态

本文 1981 年 5 月 25 日收到.

$(n = 1, l = 0)$

$$\chi_{p_B}(p) = \frac{N\left(1 + \frac{i\hat{p}}{2m_\mu}\right)u(p_B)}{[p^2 + m_\pi m_\mu + \mu_a\mu_b p_B^2][m_\pi^2 + (p + \mu_a p_B)^2][m_\mu^2 + (\mu_b p_B - p)]^2} \tag{5}$$

归一化常数为

$$N = \delta\sqrt{\frac{\pi m_B}{\mu_a}}\,\alpha^{5/2}\mu^{5/2}$$

$\mu = \dfrac{m_\pi m_\mu}{m_\pi + m_\mu}$; (3) 式中的 p_1、p_2、p_3、p_4 分别是末态 π、e^-、$\bar{\nu}_e$、ν_μ 的四动量. (5) 式中的 $\hat{p}$ 是 $\gamma_\mu p_\mu$.

利用

$$(i\hat{p}_B + m_B)u(p_B) = 0 \tag{6}$$

(4) 式可化为

$$M = \frac{N}{\mu_a D^2}\bar{u}_e(p_2)\gamma_\rho(1 + \gamma_5)v_{\nu_e}(p_3)\bar{u}_{\nu_\mu}(p_4)\gamma_\rho(1 + \gamma_5)(A + i\hat{p}_1')u(p_B) \tag{7}$$

其中

$$D = m_\mu^2 - m_\pi^2 - m_B^2 - 2(p_1 \cdot p_B); \quad A = \frac{\mu_a m_B}{2m_\mu}, \ \hat{p}_1' = \frac{\hat{p}_1}{2m_\mu}$$

二、衰 变 几 率

在初态粒子静止系中 ($\boldsymbol{p}_B = 0$), 有

$$D = 2m_B(\varepsilon_1 - m_\pi + \mu_b\Delta); \quad \Delta = \frac{1}{2}\mu\alpha^2 \tag{8}$$

Δ 是 $B(\pi^+\mu^-)$ 的结合能, α 是精细结构常数. 衰变几率为

$$w = \frac{G_F^2}{2}\cdot\frac{N^2}{\mu_a^2\Delta m_\mu^2}\cdot\frac{1}{(2\pi)^8}\int\frac{d^3\boldsymbol{p}_1}{\varepsilon_1}\cdot\frac{d^3\boldsymbol{p}_2}{\varepsilon_2}\cdot\frac{d^3\boldsymbol{p}_3}{\varepsilon_3}\cdot\frac{d^3\boldsymbol{p}_4}{\varepsilon_4}\cdot\frac{F}{D^4}\delta(p_B - p_1 - p_2 - p_3 - p_4) \tag{9}$$

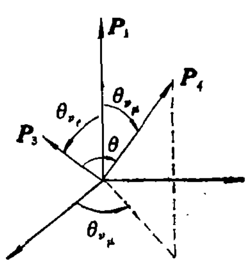

图 2

其中对初态自旋求平均、对末态自旋求和部分是

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}\sum_B\sum_e\sum_{\bar{\nu}_e}\sum_{\nu_\mu}\frac{|\langle f|S - 1|i\rangle|^2}{(2\pi)^8[\delta(0)]^2} \\ &= \frac{1}{64m_B}S_p\{\gamma_\rho(1 + \gamma_5)(-i\hat{p}_3)(1 - \gamma_5)\gamma_\sigma(m_e - i\hat{p}_2)\} \\ &\quad\cdot S_p\{\gamma_\rho(1 + \gamma_5)(2Am_\mu + i\hat{p}_1)(m_B - i\hat{p}_B) \\ &\quad\cdot(2Am_\mu + i\hat{p}_1)\cdot(1 - \gamma_5)\gamma_\sigma(-i\hat{p}_4)\} \\ &= -4(p_2 \cdot p_4)[(a^2 - m_\pi^2)\varepsilon_3 + 2(a - \varepsilon_1)(p_1 \cdot p_3)] \end{aligned} \tag{10}$$

式中 $a = 2m_\mu + \mu_a m_B$. 为了求出 (9) 式对末态相空间的积分, 取 $\boldsymbol{p}_1$ 在 z 轴方向, $\boldsymbol{p}_3$ 在 xz 平面中(图 2) 则在 $\boldsymbol{p}_B = 0$ 初态静止系中, 利用能量动量守恒条件, 可得

$$F = 4\varepsilon_3\varepsilon_4[p_1\cos\theta_{\nu_\mu} + \varepsilon_3\cos\theta + \varepsilon_4 + \varepsilon_2][(a^2 - m_\pi^2) + 2(a - \varepsilon_1)(p_1\cos\theta_{\nu_e} - \varepsilon_1)] \tag{11}$$

将（11）式的 F 代入（9）式，先积去 $d^3\boldsymbol{p}_2$，然后对末态能量积分，再对 $d\phi_{\nu_\mu}$ 积分，再对 $\cos\theta_{\nu_\mu}$ 和 $\cos\theta_{\nu_e}$ 积分，最后得到（9）式中的相空间积分为

$$I=\frac{16\pi^2}{3}\int\frac{d^3\boldsymbol{p}_1}{\varepsilon_1 D^4}\int_0^{(\varepsilon_3)_{\max}}\varepsilon_3^2 d\varepsilon_3[g_1(\varepsilon_3)-4m_e^2 g_2(\varepsilon_3)+m_e^4 g_3(\varepsilon_3)] \tag{12}$$

其中

$$\begin{cases} g_1(\varepsilon_3)=3u_1[(m_B-\varepsilon_1)^2-\varepsilon_1^2+m_\pi^2] \\ \qquad -2[3(m_B-\varepsilon_1)u_1+2(\varepsilon_1^2-m_\pi^2)(a-\varepsilon_1)]\cdot\varepsilon_3 \\ g_2(\varepsilon_3)=u_1=p_1^2+(2m_\mu+\mu_a m_B-\varepsilon_1)^2 \\ g_3(\varepsilon_3)=\dfrac{2v_1}{v_2}+\dfrac{u_1v_2-v_1u_2}{4p_1^2\varepsilon_3^2}\ln\dfrac{u_2+v_2}{u_2-v_2} \end{cases} \tag{13}$$

而 $v_1=2(a-\varepsilon_1)p_1$；$v_2=-2p_1\varepsilon_3$；$u_2=(m_B-\varepsilon_1-\varepsilon_3)^2-\varepsilon_1^2-\varepsilon_3^2-m_\pi^2$.

当电子质量 m_e 可以忽略时，(12) 式中后两项是小量，可略去. 这时 $(\varepsilon_3)_{\max}=\frac{1}{2}\cdot(m_B-\varepsilon_1+\sqrt{\varepsilon_1^2-m_\pi^2})$，将(13)式代入(12)式，可以积出对 ε_3 的积分，最后对 $\boldsymbol{p}_1$ 的 $d\Omega_{\hat{p}_1}$ 积分，得到

$$I=\frac{8\pi^3}{3m_B^4}\int_{m_\pi}^{\frac{m_B^2+m_\pi^2}{2m_B}}d\varepsilon_1\frac{\sqrt{\varepsilon_1^2-m_\pi^2}}{[\varepsilon_1-m_\pi+\mu_b\Delta]^4}f(\varepsilon_1) \tag{14}$$

其中

$$f(\varepsilon_1)=\frac{1}{32}[m_B-\varepsilon_1+\sqrt{\varepsilon_1^2-m_\pi^2}]^4\{[m_B-\varepsilon_1-4\sqrt{\varepsilon_1^2-m_\pi^2}]$$
$$\cdot[(a-\varepsilon_1)^2+\varepsilon_1^2-m_\pi^2]-2(a-\varepsilon_1)(\varepsilon_1^2-m_\pi^2)\} \tag{15}$$

只要计算出积分 (14)，就可由下式求出 $(\pi^+\mu^-)\to\pi^+e^-\bar{\nu}_e\nu_\mu$ 的衰变几率

$$w=\frac{G_F^2}{2}\cdot\frac{N^2}{\mu_a^2 4m_\mu^2}\cdot\frac{1}{(2\pi)^8}\cdot I \tag{16}$$

三、计算结果与讨论

如果在积分(14)中，取近似 $\mu_b\Delta\to 0$，则被积函数在 $\varepsilon_1\to m_\pi$ 时有一个很窄的高峰，采用如下近似，可得

$$I\approx f(\varepsilon_1=m_\pi)\int_{m_\pi}^{\frac{m_B^2+m_\pi^2}{2m_B}}d\varepsilon_1\frac{\sqrt{\varepsilon_1^2-m_\pi^2}}{(\varepsilon_1-m_\pi+\mu_b\Delta)^4}$$
$$\approx f(\varepsilon_1=m_\pi)\frac{\pi m_B^2}{(m_B-m_\pi)^2}\cdot\frac{1}{\mu_a^2\mu_b}\cdot\frac{1}{\alpha^5} \tag{17}$$

考虑到 $f(\varepsilon_1=m_\pi)=\frac{1}{8}m_\mu^2(m_B-m_\pi)^5$，则得

$$w\approx\frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3}\left[1+0\left(\frac{\Delta}{m_\mu}\right)\right] \tag{18}$$

这与自由 μ 衰变结果一致. 但由于 $\mu_b\Delta$ 并不等于零，而且 (17) 式的近似也不一定很可靠，因此我们对 (14) 式用电子计算机进行积分. 数值计算的结果给出

$$w \approx 0.475 \times 10^{-6}\,1/\text{秒} \tag{19}$$

这比自由 μ 衰变几率约大百分之五左右.

在 [3] 中，我们曾对 $(\pi^{\pm}\mu^{\mp})$、$(K^{\pm}\mu^{\mp})$ 的三体衰变进行过类似的计算，得到的 w 也与 $w_{\text{自由}}$ 稍有不同. 在已经计算过的例子中，似乎都有 $w > w_{\text{自由}}$，如果我们的计算结果正确，这表明处于这类束缚态中的不稳定粒子的衰变寿命将小于它的自由衰变寿命，这和超核中发现的情况类似，实验表明[4]，处于原子核内的 Λ 粒子的寿命小于自由 Λ 衰变的寿命，但是对于处于原子核内的中子，情况比较复杂. 因此处于束缚态中不稳定粒子的寿命与它的自由衰变寿命的差别可能和束缚相互作用有密切的关系，这也许是一个值得进一步研究的问题.

附 录 I

由 $p_B = 0$ 得

$$p_2^2 = (p_1 + p_3 + p_4)^2 = \varepsilon_1^2 - m_1^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 + 2p_1\varepsilon_3\cos\theta_{\nu_e} + 2p_1\varepsilon_4\cos\theta_{\nu_\mu} + 2\varepsilon_3\varepsilon_4\cos\theta$$

或 (m_1 即 m_π)

$$\varepsilon_2^2 - \varepsilon_4^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_3^2 - m_1^2 + m_e^2 + 2p_1\varepsilon_3\cos\theta_{\nu_e} + 2\varepsilon_4(p_1\cos\theta_{\nu_\mu} + \varepsilon_3\cos\theta) \tag{I.1}$$

由能量守恒得

$$m_B = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4$$

上式给出

$$\varepsilon_2^2 - \varepsilon_4^2 = (m_B - \varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 - 2\varepsilon_4(m_B - \varepsilon_1 - \varepsilon_3) \tag{I.2}$$

由 (I.1) 及 (I.2) 可得

$$2\varepsilon_4 = \frac{f_2(\varepsilon_1, \varepsilon_3, \cos\theta_{\nu_e})}{m_B - \varepsilon_1 - \varepsilon_3 + p_1\cos\theta_{\nu_\mu} + \varepsilon_3\cos\theta} \tag{I.3}$$

其中

$$f_2(\varepsilon_1, \varepsilon_3, \cos\theta_{\nu_e}) = m_B^2 + m_1^2 - m_\pi^2 - 2m_B(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) + 2\varepsilon_1\varepsilon_3 - 2p_1\varepsilon_3\cos\theta_{\nu_e} \tag{I.4}$$

在 $p_B = 0$ 参考系中，

$$p_2 \cdot p_4 = -\varepsilon_4(p_1\cos\theta_{\nu_\mu} + \varepsilon_3\cos\theta + \varepsilon_4 + \varepsilon_2) \tag{I.5}$$

$$p_1 \cdot p_3 = \varepsilon_3(p_1\cos\theta_{\nu_e} - \varepsilon_1) \tag{I.6}$$

把 (I.5) 和 (I.6) 代入 (10)，即得 (11) 式.

附 录 II

把 (11) 式的 F 代入 (9)，则积分部分为

$$I = \int \frac{d^3p_1}{\varepsilon_1 D^4} \cdot \frac{d^3p_2}{\varepsilon_2} \cdot \frac{d^3p_3}{\varepsilon_3} \cdot \frac{d^3p_4}{\varepsilon_4}\,\delta(p_B - p_1 - p_2 - p_3 - p_4)F \tag{II.1}$$

对 d^3p_2 积分后得

$$\begin{aligned} I = \int \frac{d^3p_1}{\varepsilon_1 D^4} \cdot \frac{1}{\varepsilon_2} \cdot d^3p_3 4\varepsilon_4^2 d\varepsilon_4 d\Omega_4 \delta(m_B - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4) \\ \cdot [p_1\cos\theta_{\nu_\mu} + \varepsilon_3\cos\theta + \varepsilon_4 + \varepsilon_2] f_1(\varepsilon_1 \cos\theta_{\nu_e}) \end{aligned} \tag{II.2}$$

其中

$$\begin{cases} f_1(\varepsilon_1, \cos\theta_{\nu_e}) = a^2 - m_\pi^2 + 2(a - \varepsilon_1)(p_1\cos\theta_{\nu_e} - \varepsilon_1) \\ a = 2m_\mu + \mu_a m_B \end{cases} \tag{II.3}$$

(II.2) 式在对末态能量积分后(利用 (I.1) 式)得到

$$I = \int \frac{d^3 p_1}{\varepsilon_1 D^4} d^3 p_3 4\varepsilon_4^2 d\Omega_4 f_1(\varepsilon_1, \cos\theta_{\nu_e})$$

利用 (I.3) 式，上式可写成(其中 f_2 见 (I.4) 式)

$$I = \int \frac{d^3 p_1}{\varepsilon_1 D^4} \varepsilon_3^2 d\varepsilon_3 d\cos\theta_{\nu_e} 2\pi f_1(\varepsilon_1, \cos\theta_{\nu_e})[f_2(\varepsilon_1, \varepsilon_3, \cos\theta_{\nu_e})]^2 \int \frac{d\cos\theta_{\nu_\mu} d\phi_{\nu_\mu}}{[m_B - \varepsilon_1 - \varepsilon_3 + p_1\cos\theta_{\nu_\mu} + \varepsilon_3\cos\theta]^2} \tag{II.4}$$

考虑到

$$\cos\theta = \cos\theta_{\nu_e}\cos\theta_{\nu_\mu} + \sin\theta_{\nu_e}\sin\theta_{\nu_\mu}\cos\phi_{\nu_\mu}$$

则对 $d\phi_{\nu_\mu} d\cos\theta_{\nu_\mu}$ 积分后得到

$$I = 8\pi^2 \int \frac{d^3 p_1}{\varepsilon_1 D^4} \varepsilon_3^2 d\varepsilon_3 \int d\cos\theta_{\nu_e} f_1(\varepsilon_1, \cos\theta_{\nu_e}) \frac{[f_2(\varepsilon_1, \varepsilon_3, \cos\theta_{\nu_e})]^2}{f_2(\varepsilon_1, \varepsilon_3, \cos\theta_{\nu_e}) + m_e^2} \tag{II.5}$$

(II.5) 式中对 $\cos\theta_{\nu_e}$ 的积分可化为

$$\int d\cos\theta_{\nu_e} f_1 \frac{[f_2' - m_e^2]^2}{f_2'} \equiv I_1 - 2m_e^2 I_2 + m_e^4 I_3 \tag{II.6}$$

其中 $f_2' \equiv f_2 + m_e^2$，并且

$$I_1 = \int d\cos\theta_{\nu_e} f_1 f_2'; \quad I_2 = \int d\cos\theta_{\nu_e} f_1; \quad I_3 = \int d\cos\theta_{\nu_e} \frac{f_1}{f_2'} \tag{II.7}$$

经过较长的运算和积分后，不难得到

$$I_1 = \frac{2}{3} g_1(\varepsilon_3); \quad I_2 = \frac{4}{3} g_2(\varepsilon_3); \quad I_3 = \frac{2}{3} g_3(\varepsilon_3) \tag{II.8}$$

其中 g_1、g_2、g_3 的表示式见正文中的 (13) 式. 把 (II.8) 代入 (II.6) 再代入 (II.5) 即得正文中的 (12) 式.

参考文献

[1] 何祚庥、张肇西、黄涛，物理学报，25(1976)，215; 26(1977)，540.
[2] Ching Cheng-rui, Ho Tcu-hsiu, Chang Chao-hsi, *Phys. Letters*, **B98**(1981), 456.
[3] 宋孝同、庆承瑞，高能物理与核物理，4(1982)，394.
[4] Neild, K. J. et al., *Phys. Rev.*, **C13**(1976), 1263.

A FOUR-PARTICLE DECAY OF THE DI-EXOTIC ATOM ($\pi^{\pm}\mu^{\mp}$)

Song Xiao-tong

(*Hangzhou University*)

Abstract

The decay rate of a four-particle decay of the di-exotic atom ($\pi^{\pm}\ \mu^{\mp}$) is calculated by using perturbation expansion of the quantized composite field theory. The result is compared with the decay rate of a free muon.