第6卷 第2期 高能物理与核物理 Vol. 6, No. 2
1982年3月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Mar., 1982

$SU(N)$经典杨-Mills方程广义静态球对称解与静态球对称外源的关系

马 中 骐
(中国科学院高能物理研究所)

摘 要

本文讨论了 $SU(N)$ 经典杨-Mills 方程正常广义静态球对称解与静态球对称外源的关系，证明了：(i) 可对角化的、不完全均匀的静态球对称外源如果在某球壳 $r_1<r<r_2$ 处是N 或 $(N-1)$ 级延展的，则正常广义静态球对称解一定是库仑解；(ii) 非狭义球对称的正常广义静态球对称解不可能屏蔽在空间有限区域内.

一、引 言

现在，多数物理学家相信，强作用具有颜色 $SU(3)$ 对称性，而弱作用和电磁作用，按照 Weinberg-Salam 模型[1]，在 $SU(2)\times U(1)$ 规范群基础上统一起来了. 这三种相互作用都是通过规范场传递的，它们可能在更大的能量标度上统一起来. Georgi-Glashow[2] 提出 $SU(5)$ 大统一模型，在 10^{15}GeV 能量标度上，把这三种相互作用统一在 $SU(5)$ 规范理论中. 这些理论所取得的成功，促使人们更深入研究 $SU(N)$ 规范理论. 当然，这里本质上是量子现象.

场的量子化方法一般分为两大类，以前常用的是正则量子化方法，在研究规范理论时，发现路径积分量子化方法更为方便. 在后一方法中，S 矩阵元和其它物理观测量矩阵元都按照经典组态进行展开，因此有必要对稳定的经典组态及其性质进行研究. 特别在研究量子规范理论的某些问题，例如夸克禁闭问题，遇到困难以后，有些人觉得，对经典规范理论的深入系统的研究[3]，可能会对规范场的量子现象的认识有所帮助. 人们首先研究无源经典规范场的解及其性质，近来，经典规范场的有源解及其性质也开始受到注意[4-10]. 所谓“外源”实际上代表了物质场对规范场的作用，本来应该把物质场方程和规范场方程联立起来求解，但这在数学上比较困难，作为一定程度上的近似，可以先假定外源的空间分布是固定的、而计算在此外源下规范场的解.

人们的注意力主要集中在寻找具有非阿贝尔特性的解，并研究其性质. 但 $SU(N)$ 规范场杨-Mills 方程虽然是非线性的，它仍存在阿贝尔的所谓库仑解. Mandula[4,11] 等人发现，非阿贝尔规范场的库仑解存在特殊的性质：当耦合强度小于某临界值时，库仑解是稳定的，但当耦合强度大于此临界值时，库仑解变成不稳定的，小的涨落就会使库仑解变成

本文 1980 年 11 月 14 日收到.

其它组态．因为量子涨落总是存在的，所以在耦合强度足够大时，量子系统就不能在库仑解附近作微扰展开．这也许正好对应红外现象中微扰展开方法不适用的情况．

作为物理上最为重要，而数学上又比较容易处理的一种情况，是讨论广义静态球对称解．Magg[12]证明了，对 $SU(2)$ 规范场，如果静态球对称延展外源沿径向处处不均匀，则广义静态球对称解只有库仑解．我们曾把这结论推广到 $SU(N)$ 群规范场[13,14]，而且放弃了外源在空间处处不均匀的条件，在证明方法上也作了较大的改进．但这条件仍显得太严，要想进一步放宽条件，必须引进新的数学方法．

谷超豪[15,16] 对 $SU(N)$ 广义球对称规范场和广义静态规范场进行了分类，讨论了它们的一般形式，但是因为没有涉及运动方程和外源，还只是运动学的研究．他在杨振宁引进的不可积相因子[17] 方法的基础上，提出标准微分环路位相因子的概念，后者具有良好的规范协变性，而在特定的规范下，它本身又可看作规范势．我们应用标准微分环路位相因子的方法来研究正常广义静态球对称解的性质，指出在什么样的外源条件下，正常广义静态球对称解只有库仑解．

如不特殊声明，本文所讨论的规范势都在全空间（包括原点）存在连续的二级微商．

第二节引入几个定义和四条定理，第三节到第五节分别证明这些定理，并给出某些推论，第六节作一简单的小结．

二、定义和主要结论

考虑存在外源的 $SU(N)$ 杨-Mills 方程

$$D_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \tag{1}$$

其中 D_μ 是协变微商，

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - ig[A^\mu, A^\nu]. \tag{2}$$

广义"电场"和"磁场"为

$$\boldsymbol{E} = \{F^{10}, F^{20}, F^{30}\}, \quad \boldsymbol{B} = \{F^{32}, F^{13}, F^{21}\}. \tag{3}$$

A^μ，$F^{\mu\nu}$ 和 J^ν 都是 $N \times N$ 厄米无迹矩阵，在规范变换 $U(x) \in SU(N)$ 中

$$A^\mu(x) \to U(x)A^\mu(x)U^{-1}(x) - \frac{i}{g}[\partial^\mu U(x)]U^{-1}(x), \tag{4}$$

$$S(x) \to U(x)S(x)U^{-1}(x), \tag{5}$$

其中 S 是 $N \times N$ 无迹矩阵，它可以代表 $F^{\mu\nu}$ 或 J^ν 等物理量，这样的按伴随表示变换的量 S 简称为规范协变量．今后用带一个下标的量，如 S_a，表示它们的对角元，带两个不相等的下标 ab 的量，如 S_{ab}，表示它们的非对角元．

定义 若 $\boldsymbol{J} = 0$，称静态外源．

静态外源在一定规范下可以与时间无关．例如取瞬时规范，$A^0 = 0$，则根据外源协变散度为零

$$D_\mu J^\mu = 0, \tag{6}$$

可知
$$J^0(x) \equiv q(x) = q(\boldsymbol{x}).$$

定义 对静态外源，若 $q(\boldsymbol{x})$ 可通过非奇规范变换对角化

$$q=\mathrm{diag}\{q_1(x),\cdots,q_N(x)\},\quad \sum_{a=1}^{N}q_a(x)=0, \tag{7}$$

则称为可对角化的静态外源，反之，称为不可对角化的静态外源.

定义 若在空间转动后的外源可通过规范变换与转动前的外源联系起来，则此外源称为球对称外源.

可对角化的静态球对称外源，在适当的规范下可表为

$$\boldsymbol{J}=0,\quad J^0=q(r),\quad q_{ab}=0, \tag{8}$$

定义 可对角化的静态外源对角化后，若其本征值(对角元)互不相等(完全非简并)

$$q_a\neq q_b,\quad 当\ a\neq b\ 时, \tag{9}$$

则称延展外源，(9)式也称延展条件.

定义 可对角化的静态球对称外源，若在某球壳 $r_1<r<r_2$ 中有 p 个本征值是非简并的

$$q_j\neq q_a,\quad j\neq a,\quad j=1,2,\cdots,p,\quad a=1,2,\cdots,N,\ r_1<r<r_2, \tag{10}$$

而且在球壳一外侧附近 ($r\lesssim r_1$ 或 $r\gtrsim r_2$) 有 p' 个简并的本征值解除了简并，例如

$$q_j\neq q_a,\quad j\neq a,\quad p<j\leqslant p+p',a=1,2,\cdots,N,\ r\lesssim r_1\ 或\ r\gtrsim r_2 \tag{11}$$

(此处并不要求(10)式在球壳外侧成立)则称此外源在球壳处是 $(p+p')$ 级延展外源.

定义 如果规范势满足下面条件，称为正常的广义静态球对称规范势:

(i) A^μ 在全空间存在连续的二级微商，原点非奇(正常);

(ii) 经过时间平移变换后的规范势与原规范势规范等价(静态);

(iii) 对空间任何转动 $R\in SO(3)$，存在相应规范变换 $U_R(x)$，使

$$\left.\begin{array}{c}U_R(x)A_\mu(x)U_R^{-1}(x)-\dfrac{i}{g}[\partial_\mu U_R(x)]U_R^{-1}(x)=\displaystyle\sum_{\nu=0}^{3}A_\nu(Rx)R^\nu_\mu,\\ R^0_\mu=R^\mu_0=\delta_{\mu0}.\end{array}\right\} \tag{12}$$

显然，由广义静态球对称规范势构成的一切规范不变量都是静态的和转动不变的.

对 $SU(N)$ 规范场，当原点非奇异时，文献[15]指出，广义球对称的规范场必可选取适当规范，对任何空间转动 $R\in SO(3)$，至少存在一个与时空坐标 x 无关的规范变换 $U_R\in SU(N)$，使(12)式成立. 在证明此结论时，文献[15]引入了标准微分环路位相因子 $k(x,dx)=igk_\mu(x)dx^\mu$[16]，它是取值李代数 $SU(N)'$ 上的一次微分形式. 取 $Ox'x$ 为标准通路 x' 是 x 在时间轴上的投影，标准微分环路位相因子满足相容性条件

$$\boldsymbol{k}(x)\cdot\boldsymbol{r}=0,\quad k_\mu(t,0)=0. \tag{13}$$

给定了规范势，也就给定了标准微分环路位相因子 k，反之，给定了标准微分环路位相因子 k，可求出任何环路的位相因子，它给出了规范势的一个等价类，而且 k 本身就是这个等价类中的一个规范势. 位相因子 k 具有良好的规范协变性. 规范势等价的必充条件是位相因子 k 满足

$$k'(x,dx)=uk(x,dx)u^{-1}. \tag{14}$$

$u\in SU(N)$，与时空坐标 x 无关.

规范势是广义球对称的充要条件是: 对任何空间转动 $R\in SO(3)$，存在 $u_R\in SU(N)$，使

$$k(Rx,dRx)=u_Rk(x,dx)u_R^{-1} \tag{15}$$

u_R 与时空坐标无关，所有 u_R 的集合构成 $SU(N)$ 的一个闭子群 G_1，对应三维空间恒等转动 E（不变的"转动"）的规范变换 u_E 的集合构成 G_1 的闭不变子群 H. 商群 G_1/H 是转动群 $SO(3)$ 的一个同态映照，它给出 $SO(3)$ 群的一个 N 维表示. $SU(N)$ 正常广义球对称规范场可以根据这表示进行分类. 今后我们把这表示称为正常广义球对称规范场所对应的表示. 若此表示是平凡的（都是单位矩阵），则此规范场是狭义球对称的.

我们要证明下面几个结论：

定理一　如果外源在球壳 $r_1 < r < r_2$ 中是可对角化的、静态球对称的、满足延展条件和不完全均匀的，则 $SU(N)$ 杨-Mills 方程的正常广义静态球对称解，如果存在的话，一定在全空间是狭义静态球对称的，即存在一定的规范，使规范势本身是静态的和转动不变的，且可表为

$$\boldsymbol{A} = 0, \quad A^0 = \phi(r) \tag{16}$$

定理二　可对角化的、不完全均匀的静态球对称外源，如果在球壳 $r_1 < r < r_2$ 处是 $(p + p')$ 级延展的（满足(10)和(11)式），则 $SU(N)$ 杨-Mills 方程的正常广义静态球对称解所对应的表示，除去平凡表示后，至多包含 $\left[\frac{3}{2}(N - p - p')\right]$ 维表示.

定理三　对可对角化的静态外源，如果 $SU(N)$ 杨-Mills 方程存在正常狭义静态球对称解，则此解必是库仑解.

定理四　非狭义球对称的正常广义静态球对称解不可能屏蔽在空间有限区域内.

下面各节分别证明这些结论.

三、定理一和二的证明

引理　如果外源在球壳 $r_1 < r < r_2$ 中是可对角化的、静态球对称的、满足延展条件和不完全均匀的，则 $SU(N)$ 杨-Mills 方程的广义静态球对称解在球壳中一定是库仑解，即存在适当的规范，使解在球壳中满足：

$$\left.\begin{aligned} &A^\mu_{ab} = 0, && \mu = 0, 1, 2, 3 \\ &\boldsymbol{A}_a = 0, && a, b = 1, 2, \cdots, N \\ &\nabla^2 A^0_a(r) = -q_a(r). && r_1 \leqslant r \leqslant r_2 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

我们在文献[14]中，就全空间 $(r_1 = 0, r_2 \to \infty)$ 的情况证明了这引理. 重复这套证明的方法，也可以在球壳中证得此引理. 当然球壳是包括全空间、球体 $(r_1 = 0)$ 和球外 $(r_2 \to \infty)$ 的更一般的情况. 在证明过程中有两点略有不同：(i) 广义球对称解的定义略有不同，但这里的定义满足文献[14]的要求；(ii) 因为由全空间缩小到球壳，用 Gauss 定理证明 $\boldsymbol{B}_a = \nabla \wedge \boldsymbol{A}_a = 0$ 的方法应稍作修改. 可以一般证明，在球壳中旋度转动不变的矢量场一定在球壳中是无旋场. 设

$$\boldsymbol{B}_a = \nabla \wedge \boldsymbol{A}_a \in \hat{\boldsymbol{r}}\mathscr{S}, \quad r_1 < r < r_2$$

$$\oiint_{S^2} (\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{A}_a) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iiint_V \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{A}_a) dV = 0,$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{A}_a = 0, \tag{18}$$

这里可不管球壳外 $\boldsymbol{B}_a$ 是否无散.

现在来证明定理一. 设正常的广义静态球对称解存在，它的标准微分环路位相因子是 $k(x, dx)$，作为规范势，在球壳中，它与(17)式的解规范等价，即存在特定的规范变换 $V(x)$ 能把 $k_\mu(x)$ 化为(17)式形式. 在空间转动中，k 按(15)式变换，u_R 与 x 无关，且构成 $SO(3)$ 群的线性表示. 令

$$U_R(x) = V(Rx)u_R V^{-1}(x), \tag{19}$$

$$U_S(Rx)U_R(x) = U_{SR}(x), \tag{20}$$

直接代入可知，在球壳中 $U_R(x)$ 使(17)式形式的解满足(12)式，相应外源满足

$$U_R(x)q(r)U_R(x)^{-1} = q(r). \tag{21}$$

现在讨论 $U_R(x)$ 的性质. 由(12)和(17)式，$\boldsymbol{A}(x) = 0$，$U_R(x)$ 只能是时间的函数，于是(20)式说明 $U_R(t)$ 构成三维转动群的线性表示. 但是在球壳中、$q(r)$ 是对角矩阵，且满足延展条件，因此 $U_R(t)$ 也只能是对角矩阵、每个对角元都分别构成 $SO(3)$ 群的一维表示. $SO(3)$ 群的一维表示只有平凡表示，即 $U_R(t) = 1$. 代入(19)式

$$u_R = V^{-1}(Rx)V(x) \tag{22}$$

u_R 与 x 无关，取 x 在 R 的转动轴上，$Rx = x$，则 u_R 也是单位矩阵. 按照谷超豪的分类[15]，这样的解是狭义球对称解，可选取适当的规范，使规范势表为

$$\boldsymbol{A} = 0, \quad A^0 = \phi(r, t). \tag{23}$$

根据广义静态解的定义，t 时刻的解可以和某确定时刻，例如 $t = 0$ 时刻的解，通过规范变换 U 联系起来. 因 $\boldsymbol{A} = 0$，U 只能是时间 t 的函数. 作此规范变换后，规范势化为狭义静态球对称解的形式(16)[1].

现在来证明定理二. 先讨论球壳中规范场的标准形式. 根据广义静态解的定义，作规范变换 U 消去规范势的时间变量，这样外源也不含时间变量. 因为外源是可对角化的，作仅依赖于空间坐标的规范变换把 $q(\boldsymbol{x})$ 对角化，对角元只是矢径长 r 的函数，且满足(10)式. 代入(6)式

$$\begin{gathered}\phi_{ab}(\boldsymbol{x})(q_b - q_a) = 0, \\ \phi_{bj} = \phi_{jb} = 0, \quad j \neq b, \quad j \leqslant p, \quad b = 1, 2, \cdots, N\end{gathered} \tag{24}$$

ϕ 是准对角化的. 利用文献[14]的技巧，设 $\boldsymbol{K}, \boldsymbol{L}$ 是由规范势构成的规范协变矢量，由 $\mathrm{Tr}(q^n\boldsymbol{K}) \in \hat{r}\mathscr{S}$ 得

$$\boldsymbol{K}_j \in \hat{r}\mathscr{S}, \quad j \leqslant p. \tag{25}$$

以 $\boldsymbol{K}qm \wedge \boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{K}qm \wedge (\boldsymbol{K} \wedge \boldsymbol{\pi})$代替 $\boldsymbol{K}$. $\boldsymbol{\pi}$ 是与外源协变梯度有关的规范不变的非零径向矢量场，得

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{K}_{jk} /\!/ \boldsymbol{K}_{kj} /\!/ \boldsymbol{r}, \quad j, k \leqslant p \\ &\sum_{a=p+1}^{N} \boldsymbol{K}_{ja} \wedge \boldsymbol{L}_{aj} \in \hat{r}\mathscr{S}.\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

再以 $\boldsymbol{D}q$ 代上式中的 $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{L}$，得

$$\boldsymbol{A}_{jk} /\!/ \boldsymbol{r}, \quad \sum_{a=p+1}^{N} \boldsymbol{A}_{ja} \wedge \boldsymbol{A}_{aj} \in \hat{r}\mathscr{S}, \quad j, k \leqslant p. \tag{27}$$

---

1) 文献[16]把广义静态解分成三类，前两类明显是狭义静态的，第三类"周期性"场，作为标准微分环路位相因子，它不是狭义静态的，但作为规范势，它可通过规范变换消去时间，此时它不再是标准微分环路位相因子，它不满足相容性条件[18].

以 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别代(25)式的 $\boldsymbol{K}$，注意(27)式，有

$$\phi_j = \phi_j(r), \quad j \leqslant p, \quad \nabla \wedge \boldsymbol{A}_j \in \hat{\boldsymbol{r}}\mathscr{S} \tag{28}$$

于是

$$\nabla \wedge \boldsymbol{A}_j = 0, \quad j \leqslant p. \tag{29}$$

可通过只依赖于空间坐标的对角规范变换使

$$\boldsymbol{A}_j = 0, \quad j \leqslant p \tag{30}$$

与定理一的证明一样，引人标准微分环路位相因子 k，同样可得(19)—(21)式. 由(21)式知，$U_R(\boldsymbol{x})$ 是准对角型的

$$U_R(\boldsymbol{x})_{bj} = U_R(\boldsymbol{x})_{jb} = 0, \quad j \neq b, \quad j \leqslant p, \quad b = 1, 2, \cdots, N, \tag{31}$$

代入(12)、(28)和(30)式不难证明 $(U_R)_j$ $(j \leqslant p)$ 与时空坐标无关，于是它们分别构成三维转动群的一维平凡表示，即

$$(U_R)_j = 1, \quad j \leqslant p. \tag{32}$$

在球壳外侧附近 ($r < r_1$ 或 $r > r_2$) 有 p' 个简并的本征值解除了简并 (见 (11) 式)，同样证明可知，在那里 $(U_R)_\beta = 1$. $p < \beta \leqslant p + p'$. 由于连续性，在球壳边界上($r = r_1$ 或 $r = r_2$)

$$\left.\begin{aligned} &(U_R)_j = 1, \quad (U_R)_{jb} = (U_R)_{bj} = 0, \\ &j \neq b, \ j \leqslant p + p'. \ b = 1, 2, \cdots, N. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

代入(19)式，取 $\boldsymbol{x}$ 沿 R 的转轴方向，$Rx = x$，因此 u_R 至少有 $(p + p')$ 个本征值为 1. 既然 u_R 构成三维转动群的线性表示，除去一维平凡表示外，u_R 中至多包含有 $\left[\frac{3}{2}(N - p - p')\right]$ 维表示.

四、定理三的证明

侯伯宇、谷超豪和胡和生[19] 已经证明了无源的狭义球对称解必是库仑静电场，我们现在证明正常狭义静态球对称解，如果外源空间分量为零，必是库仑静电场.

作为规范势，静态规范势可通过规范变换消去时间[16,18]，因此，存在一定的规范，使静态的狭义球对称规范势取(16)式形式. 代入杨-Mills 方程，有

$$\begin{cases} \phi\boldsymbol{\nabla}\phi - (\boldsymbol{\nabla}\phi)\phi = 0, \\ -\nabla^2\phi = J^0, \end{cases} \tag{34}$$

这显然是库仑解.

在 J^0 对角化的表象中解得

$$\phi_{ab}(r) = \phi_{ab}(0) - \delta_{ab}\int_0^r \frac{dr'}{r'^2}\int_0^{r'} q_a(r'')r''^2 dr'' \tag{35}$$

由(6)式

$$[\phi, J^0] = 0 \tag{36}$$

如果 J^0 的任何两个对角元(本征值)在空间不处处相等，则 $\phi(0)$ 也须对角化，即

$$\phi_{ab} = 0, \quad \phi_a = \phi_a(0) - \int_0^r \frac{dr'}{r'^2}\int_0^{r'} q_a(r'')r''^2 dr''. \tag{37}$$

第一项常数项可通过对角规范变换

$$U = \mathrm{diag}\{\exp[-ig\phi_1(0)t], \cdots, \exp[-ig\phi_N(0)t]\} \tag{38}$$

消去,或者取任意给定的值.

由定理一、二和三,可以得到下述推论:系:可对角化的、不完全均匀的静态球对称外源,如果满足以下条件之一,则它的正常广义静态球对称解必是库仑解.(i)在某球壳中外源满足延展条件;(ii)在某球壳处外源是N或$(N-1)$级延展的.

对后一条,当外源是$(N-1)$级延展时,根据定理二,u_R至少有$(N-1)$个本征值是1,但$\det u_R = 1$,剩下一个本征值也只能是1,故u_R是单位矩阵.

五、定理四的证明

前面定理指出了外源可对角化的情况下,广义静态球对称解只有库仑解的条件,定理四指出非狭义球对称解一定延伸到无穷远,因此研究无穷远处规范势的性质,可以了解规范势的主要性质,尤其是与拓扑有关的性质.

我们用反证法来证明定理四.如果外源延伸到无穷远,解显然也要延伸到无穷远.现设外源$J^\mu_{(1)}$和广义静态球对称解$A^\mu_{(1)}$都只在空间有限区域内存在

$$J^\mu_{(1)} = 0, \quad A^\mu_{(1)} = 0. \quad \text{当 } r \geqslant r_0 \tag{39}$$

$A^\mu_{(1)}$不是狭义球对称的,它的标准微分环路位相因子一定对应非平凡表示.

设想存在另一个外源$J^\mu_{(2)}$:

$$J^\mu_{(2)} = \begin{cases} \delta^\mu_0 q(r), & r_0 < r_1 < r < r_2 \\ 0. & \text{其它区域} \end{cases} \tag{40}$$

$q(r)$是对角化的无迹厄米矩阵,满足延展条件

$$\left.\begin{array}{l} q_{ab} = 0, \quad q_a \neq q_b, \quad \text{当 } a \neq b \text{ 时} \\ q(r) = 0, \quad \text{当 } r = r_1 \text{ 和 } r = r_2 \text{ 时} \end{array}\right\} \tag{41}$$

取库仑解(37)式,并选$\phi_a(0) = 0$,它显然是广义静态球对称的,而且

$$\phi_a(r) = 0, \quad \text{当 } r \leqslant r_1 \tag{42}$$

把此解记作$A^\mu_{(2)}$,它可以和$A^\mu_{(1)}$连续可微地衔接起来,因为中间相隔一个$A^\mu = 0$的区域$r_0 \leqslant r \leqslant r_1$.

现设想外源J^μ为

$$J^\mu = \begin{cases} J^\mu_{(2)}, & r > r_1 \\ 0, & r_0 \leqslant r \leqslant r_1 \\ J^\mu_{(1)}. & r < r_0 \end{cases} \tag{43}$$

在全空间存在正常的广义静态球对称解

$$A^\mu = \begin{cases} A^\mu_{(2)}, & r > r_1 \\ 0, & r_0 \leqslant r \leqslant r_1 \\ A^\mu_{(1)}, & r < r_0 \end{cases} \tag{44}$$

满足杨-Mills方程(1).但此解不是狭义球对称的,这与定理一矛盾.

六、小　结

我们讨论了 $SU(N)$ 杨-Mills 方程的正常广义静态球对称解和静态球对称外源的关系，得出下面结论：(i) 可对角化的、不完全均匀的静态球对称外源，如果在某球壳处满足延展条件(9)或者是 N 或 $(N-1)$ 级延展外源（满足条件(10)和(11)式，$p+p'=N$ 或 $(N-1)$），则它的正常广义静态球对称解必是库仑解；(ii) 非狭义球对称的正常广义静态球对称解不可能屏蔽在空间有限区域内。

在电磁学中，导体球壳可以把静电场屏蔽在空间有限区域内．在 $SU(N)$ 规范场中，如果外源满足定理三中系的条件，且总"电荷"为零，则得到的正常广义静态球对称解一定是库仑解，它可以屏蔽在空间有限区域内．但对局限在空间有限区域中的拓扑性质较复杂的静态球对称外源，它的正常广义静态球对称解不是狭义球对称的，则此解就不能屏蔽在空间有限区域，这就是说，外源的拓扑性质对解的影响必然要延伸到全空间．在无穷远处外源和解的性质，决定了整个解的与拓扑性质有关的主要性质．

作者感谢胡宁教授、朱洪元教授的关心和鼓励，感谢吴泳时、周咸建、黄念宁和薛丕友等同志的有益的讨论．作者感谢谷超豪教授阅读了本文的手稿，提出了宝贵的意见，并把文献[18]送给作者阅读．

参　考　文　献

[1] S. L. Glashow, *Nucl. Phys.*, **22**(1961), 579; S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.*, **19**(1967), 1264; A. Salam, Proceedings of the 8th Nobel Symposium Stockholm 1968. ed. by N. Svartholm, p. 367.
[2] J. C. Pati, and A. Salam, *Phys. Rev. Lett.*, **31**(1973), 661; H. Georgi and S. L. Glashow, *Phys. Rev. Lett.*, **32**(1974), 438.
[3] A. Actor, *Rev. Mod. Phys.*, **51**(1979), 461.
[4] J. E. Mandula, *Phys. Lett.*, **67B**(1977), 175; M. Magg, *Phys. Lett.*, **74B**(1978), 246.
[5] J. E. Mandula, *Phys. Lett.*, **69B**(1977), 495.
[6] P. Sikivie and N. Weiss, *Phys. Rev.*, **D18**(1978), 3809.
[7] P. Pirlä and P. Presuajder, *Nucl. Phys.*, **B142**(1978), 229.
[8] R. Jackiw, L. Jacobs and C. Rebbi, *Phys. Rev.*, **D20**(1979), 474.
[9] M. Magg, *Phys. Lett.*, **78B**(1978), 481; Ref. TH. 2653-CERN (1979).
[10] R. Maciejko, *J. Math Phys.*, **19**(1978), 2491.
[11] S. J. Chang and N. Weiss, *Phys. Rev.*, **20D**(1979), 869; P. Sikivie, *Phys. Rev.*, **20D**(1979), 877.
[12] M. Magg, *Phys. Lett.*, **77B**(1978), 199.
[13] 东方晓、周咸建、黄涛、薛丕友，高能物理与核物理，**4**(1980), 724; 马中骐、东方晓、周咸建、薛丕友，高能物理与核物理，**5**(1981), 182.
[14] 马中骐、东方晓、周咸建、黄涛、薛丕友、黄念宁、中国科学，No.10 (1980), 955.
[15] 谷超豪，复旦学报（自然科学版），No.2(1977), 30.
[16] 谷超豪，复旦学报（自然科学版），No.2(1976), 51.
[17] C. N. Yang, *Phys. Rev. Lett.*, **33**(1974), 445.
[18] 谷超豪，规范场数学结构的研究，1978，未发表．
[19] 侯伯宇、谷超豪、胡和生，复旦学报（自然科学版），No.1(1977), 92.

THE RELATION BETWEEN THE STATIC SPHERICALLY SYMMETRIC SOLUTION OF CLASSICAL $SU(N)$ YANG-MILLS EQUATION IN THE WIDE SENSE AND STATIC SPHERICALLY SYMMETRIC SOURCE

MA ZHONG-QI
(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

In this paper we discuss the relation between the normal static and spherically symmetric solution of classical $SU(N)$ Yang-Mills equation in the wide sense and the static and spherically symmetric external source. We show that: (i) The normal static and spherically symmetric solution must be Coulombian for the diagonalizable non-uniform static and spherically symmetric external source, if in some sphericall shell $r_1 < r < r_2$ the source is extended in N or $(N-1)$ order; (ii) It is impossible to confine the normal static and spherically symmetric solution which is not strict spherically symmetric in finite region.