第5卷 第1期 高能物理与核物理 Vol. 5, No. 1
1981年1月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Jan., 1981

带自旋效应的 Glauber Quark 模型

鲍关雄
(南京大学)

Glauber Quark 模型成功地分析强子间的弹性、非弹性散射已有十余年的历史，但基本上仍限于忽略自旋效应的场合. 作为其结果的例子，pp 弹性散射振幅 $F_{pp}(\boldsymbol{q})$ 可以写为[1]

$$\left.\begin{aligned} F_{pp}(\boldsymbol{q}) &= \sum_{j=1}^{25} f_j(\boldsymbol{q}), \\ f_j(\boldsymbol{q}) &= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{n-1} N_j \int d^2q_1 d^2q_2 \cdots d^2q_n \delta^2(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_1 - \cdots \\ &\quad - \boldsymbol{q}_n) S_j^a S_j^b [f(\boldsymbol{q}_1) \cdot \cdots \cdot f(\boldsymbol{q}_n)]. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

其中广义形状因子 S_j 在质子波函数取为三夸克全对称的谐振子型时，可以写为:

$$S_j(\boldsymbol{\Delta}_1, \boldsymbol{\Delta}_2, \boldsymbol{\Delta}_3) = \exp\left\{-\frac{a_n^2}{4}[(\boldsymbol{\Delta}_1 - \boldsymbol{\Delta}_2)^2 + (\boldsymbol{\Delta}_2 - \boldsymbol{\Delta}_3)^2 + (\boldsymbol{\Delta}_3 - \boldsymbol{\Delta}_1)^2]\right\}. \tag{1'}$$

这里 $\boldsymbol{q}_i$ 为多次碰撞中第 i 次碰撞时某对夸克之间的动量转移；$\boldsymbol{\Delta}_k$ 为质子中第 k 个夸克在散射中的动量转移. $n = 1, 2, \cdots, 9$ 为碰撞次数. 近年来，实验上开始提供极化质子束，极化质子靶的实验的数据，因此亟待发展一种带自旋效应的 Glauber Quark 模型的方法. 把质子看作由三个夸克组成，忽略夸克在多次碰撞中的库仑效应. 那么，由推导(1)的过程[2]，我们发现：只要假定质子的夸克组成波函数的自旋同位旋部分可以从其他自由度中分离出来，记为 φ^s，且 $\{\varphi^s\}$ 构成完备集，那么带自旋效应的散射矩阵 $F^{\mu\nu}(\boldsymbol{q})$ 可以写成 $F^{\mu\nu}(\boldsymbol{q}) = \sum_{j=1}^{25} f_j^{\mu\nu}(\boldsymbol{q})$,

$$\begin{aligned} f_j^{\mu\nu}(\boldsymbol{q}) &= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{n-1} N_j \int d^2q_1 \cdot \cdots \cdot d^2q_n \delta^2(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_1 - \cdots \\ &\quad - \boldsymbol{q}_n) S_j^a S_j^b \langle \phi^\mu | f^{i_1 j_1}(\boldsymbol{q}_1) \cdots f^{i_n j_n}(\boldsymbol{q}_n) | \phi^\nu \rangle. \end{aligned} \tag{2}$$

这里 μ, ν 取 1, 2, 3, 4 分别对应散射粒子 a 和靶粒子 b 的四种自旋状态:

$$\phi^1 \sim \uparrow_a\uparrow_b \sim \varphi^{\frac{1}{2}}\varphi^{\frac{1}{2}} \quad \phi^2 \sim \downarrow_a\uparrow_b \sim \varphi^{-\frac{1}{2}}\varphi^{\frac{1}{2}} \quad \text{或} \quad \phi^\mu = \varphi^{S_a'}\varphi^{S_b'}, \ \phi^\nu = \varphi^{S_a}\varphi^{S_b}$$

$$\phi^3 \sim \uparrow_a\downarrow_b \sim \varphi^{\frac{1}{2}}\varphi^{-\frac{1}{2}} \quad \phi^4 \sim \downarrow_a\downarrow_b \sim \varphi^{-\frac{1}{2}}\varphi^{-\frac{1}{2}}$$

(2) 式中的 $f^{ij}(\boldsymbol{q})$ 为夸克的散射矩阵，按一般散射理论，对于 1/2 自旋的粒子有

$$\begin{aligned} f^{ij}(\boldsymbol{q}) &= AI^iI^j + B(\boldsymbol{\sigma}^i \cdot \boldsymbol{n})(\boldsymbol{\sigma}^j \cdot \boldsymbol{n}) + C[(\boldsymbol{\sigma}^i \cdot \boldsymbol{n})I^j + I^i(\boldsymbol{\sigma}^j \cdot \boldsymbol{n})] \\ &\quad + D(\boldsymbol{\sigma}^i \cdot \boldsymbol{q})(\boldsymbol{\sigma}^j \cdot \boldsymbol{q}) + E(\boldsymbol{\sigma}^i \cdot \boldsymbol{k})(\boldsymbol{\sigma}^j \cdot \boldsymbol{k}). \end{aligned} \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 为泡利矩阵矢量，$\boldsymbol{k} = (\boldsymbol{k}_i + \boldsymbol{k}_f)/2$，$\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{k}_f \cdot \boldsymbol{k}_i)/2$，$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{k}$，而 $\boldsymbol{k}_f, \boldsymbol{k}_i$ 为参与碰撞的粒子在质心系的终态、始态动量.

本文 1980 年 3 月 4 日收到.

由极化束、极化靶的 pp 弹性散射的实验数据，可以决定 $F^{\mu\nu}(\boldsymbol{q})$ 的参量 N_0, N_2, N_1, U_0, U_2:

$$F^{\mu\nu}(\boldsymbol{q}) = N_0 I^\mu I^\nu - N_2(\boldsymbol{\sigma}^\mu \cdot \hat{n})(\boldsymbol{\sigma}^\nu \cdot \hat{n}) - iN_1[(\boldsymbol{\sigma}^\mu \cdot \hat{n})I^\nu + I^\mu(\boldsymbol{\sigma}^\nu \cdot \hat{n})] + U_2(\boldsymbol{\sigma}^\mu \cdot \hat{q})(\boldsymbol{\sigma}^\nu \cdot \hat{q}) - U_0(\boldsymbol{\sigma}^\mu \cdot \hat{k})(\boldsymbol{\sigma}^\nu \cdot \hat{k}). \tag{4}$$

本模型就是应用 (2) 把(3)和(4)联结起来，由实验数据(4)唯象地决定夸克散射矩阵(3)的参数. 从而推测夸克的结构及其相互作用的特点.

应用(2)时要解决三个问题: I. $f^{i_1j_1}(\boldsymbol{q}_1)\cdot\cdots\cdot f^{i_nj_n}(\boldsymbol{q}_n)$ 的表达方式; II. 计算矩阵元 $\langle\phi^\mu|f^{i_1j_1}(\boldsymbol{q}_1)\cdot\cdots\cdot f^{i_nj_n}(\boldsymbol{q}_n)|\phi^\nu\rangle$; III. (2) 式的多重积分的解析运算. 把(3)代入 $f^{i_1j_1}(\boldsymbol{q}_1)\cdots f^{i_nj_n}(\boldsymbol{q}_n)$将展开成许多项，每一项都是由与六个夸克的自旋自由度对应的 2×2 单位矩阵和泡利矩阵的直积，可以写成

$$f^{i_1j_1}(\boldsymbol{q}_1)\cdot\cdots\cdot f^{i_nj_n}(\boldsymbol{q}) = \sum(H_a\times H_b),\quad H_a\times H_b = h_a^{(1)}\times h_a^{(2)}\times h_a^{(3)}\times h_b^{(1)}\times h_b^{(2)}\times h_b^{(3)},$$

因此，

$$\langle\phi^\mu|H_a\times H_b|\phi^\nu\rangle = \langle\varphi^{s_a'}|h_a^{(1)}\times h_a^{(2)}\times h_a^{(3)}|\varphi^{s_a}\rangle\langle\varphi^{s_b'}|h_b^{(1)}\times h_b^{(2)}\times h_b^{(3)}|\varphi^{s_b}\rangle.$$

于是问题 I, II 归结为: I′ $h_c^{(i)}(i=1,2,3;\ c=a,b)$ 的表达方式; II′ 矩阵元 $\langle\varphi^{s'}|H|\varphi^s\rangle$ 计算.

按 Glauber 理论，所有的单次碰撞的动量转移 $\boldsymbol{q}_l$ 均在与 $\boldsymbol{k}$ 垂直的同一平面上，因此可以取 $\boldsymbol{q}$ 为极轴的极坐标表示 $\boldsymbol{q}_l$，其角参量 θ_l 定义为 $\boldsymbol{q}$ 绕 $\boldsymbol{k}$ 轴旋转到 $\boldsymbol{q}_l$ 的角度，即

$$\cos\theta_l = \hat{q}\cdot\hat{q}_l,\quad \sin\theta_\theta = -\hat{n}\cdot\hat{q}_l. \tag{5}$$

记 $\sigma_{nl}^i \equiv \boldsymbol{\sigma}^i\cdot\hat{n}_l \equiv \boldsymbol{\sigma}^i\cdot\boldsymbol{n}/kq_l$; $\sigma_{q_l}^i \equiv \boldsymbol{\sigma}_j\cdot\hat{q}_l \equiv \boldsymbol{\alpha}^i\cdot\boldsymbol{q}_l/q_l$; $\sigma_{k_l}^i \equiv \boldsymbol{\sigma}^i\cdot\hat{k}_l = \boldsymbol{\sigma}^i\cdot\boldsymbol{k}_l/k_l$. 则由(5)得到:

$$\sigma_{nl} = \cos\theta_l\sigma_n + \sin\theta_l\sigma_q,\quad \sigma_{q_l} = \cos\theta_l\sigma_q - \sin\theta_l\sigma_n,\quad \sigma_{k_l} = \sigma_k. \tag{6}$$

若选坐标轴 X, Y, Z 沿 $\hat{n}, \hat{q}, \hat{k}$ 方向，(6)式可以写成:

$$\sigma_{nl} = \begin{pmatrix}\cos\theta_l & \sin\theta_l\\ \sin\theta_l & -\cos\theta_l\end{pmatrix},\quad \sigma_{q_l} = \begin{pmatrix}-\sin\theta_l & \cos\theta_l\\ \cos\theta_l & \sin\theta_l\end{pmatrix},\quad \sigma_{k_l} = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}. \tag{6'}$$

$h_c^{(i)}$ 是这些泡利矩阵的乘积，因此均可应用(6)计算. 当夸克散射矩阵(3)只包含前三项时 $(D=E=0)$, $h_c^{(i)}$ 只包含 I 和 σ_{nl} 的因子

$$h_c^{(i)} = H_c^i\sigma_{n1}^i\cdots\sigma_{nk}^i.$$

由(6)，我们容易得到

$$\sigma_{n1}\sigma_{n2}\cdots\sigma_{nk} = \sigma_n^{k-1}(\cos\Theta_k\sigma_n + \sin\Theta_k\sigma_q), \tag{7}$$

其中 $\Theta_k = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-k}\theta_i$.

在本模型中，$h_c^{(i)}$ 最多只包含三个泡利矩阵因子，所以即使在 $D, E\neq0$ 的情况，直接应用(6)也不复杂.

假定核子的波函数 ϕ 可以分离为对三夸克全对称的空间波函数 R、全反对称的色波函数 C 和全对称的自旋同位旋波函数 φ 三部分: $\phi = R\cdot C\cdot\varphi$.

假定散射与色无关，C 在计算中将不起作用. R 已包含在广义形状因子中. 全对称的核子的自旋同位旋波函数可以写成

$$\varphi^{SI}(1,2,3)=\frac{1}{\sqrt{2}}\{X_S^S K_S^I+X_A^S K_A^I\}. \tag{8}$$

其中自旋部分为

$$X_S^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{6}}\{2\alpha_1\alpha_2\beta_3-\alpha_1\beta_2\alpha_3-\beta_1\alpha_2\alpha_3\},\quad X_S^{-1/2}=-\frac{1}{\sqrt{6}}\{2\beta_1\beta_2\alpha_3-\beta_1\alpha_2\beta_3-\alpha_1\beta_2\beta_3\},$$

$$X_A^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\}\alpha_3,\quad X_A^{-1/2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\{\beta_1\alpha_2-\alpha_1\beta_2\}\beta_3.$$

与此完全类似地有同位旋部分 $K_S^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{6}}\{2\gamma_1\gamma_2\delta_3-\gamma_1\delta_2\gamma_3-\delta_1\gamma_2\gamma_3\}$ 等等．其中 α_i，β_i 代表第 i 夸克的自旋向上态和向下态，γ_i，δ_i 代表第 i 夸克的同位旋向上态和向下态．

φ^{SI} 共有四个态，是完备的，φ^{SI} 中 $I=1/2$ 时，为质子的自旋波函数 φ^S．

应用(8)计算 $\langle\varphi^{S'}|H|\varphi^S\rangle$，对于 $H=\begin{pmatrix}h_{11}^1 & h_{12}^1\\ h_{21}^1 & h_{22}^1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}h_{11}^2 & h_{12}^2\\ h_{21}^2 & h_{22}^2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}h_{11}^3 & h_{12}^3\\ h_{21}^3 & h_{22}^3\end{pmatrix}$ 有

$$\langle\varphi^{S'}|H|\varphi^S\rangle=\frac{1}{12}\sum_{i,i',j,j'=1}^{2}e_{ii'3}e_{jj'3}\sum_{k,k',k''=1}^{3}|e_{kk'k''}|h_{S'S}^{k}h_{ij}^{k'}h_{i'j'}^{k''}. \tag{9}$$

用 $(H)^{\mathrm{p}}$ 表示 $\langle\varphi^{S'}|H|\varphi^S\rangle$ 所对应的矩阵，(9)式可以改写成：

$$(H)^{\mathrm{p}}=\frac{1}{6}\{(h_{11}^2h_{22}^3+h_{22}^2h_{11}^3-h_{21}^2h_{12}^3-h_{12}^2h_{21}^3)(h^{(1)})^{\mathrm{p}}+(h_{11}^1h_{22}^3+h_{22}^1h_{11}^3$$
$$-h_{21}^1h_{12}^3-h_{12}^1h_{21}^3)(h^{(2)})^{\mathrm{p}}+(h_{11}^1h_{22}^2+h_{22}^1h_{11}^2-h_{21}^1h_{12}^2-h_{12}^1h_{21}^2)(h^{(3)})^{\mathrm{p}}\} \tag{9'}$$

其中 $(h^{(i)})^{\mathrm{p}}=\begin{pmatrix}h_{11}^i & h_{12}^i\\ h_{21}^i & h_{22}^i\end{pmatrix}^{\mathrm{p}}$，用上标 p 表示矩阵在质子的自旋自由度上，以区别于夸克自旋空间上的矩阵 $h^{(i)}$．e_{ijk} 是反对称的，非零元素 $e_{123}=e_{231}=e_{312}=-e_{132}=-e_{321}=-e_{213}=1$．

当 $H=h^{(1)}\times h^{(2)}$ 或 $H=h^{(1)}$ 时，(9′)式可化简为

$$(h^{(1)}\times h^{(2)})^{\mathrm{p}}=\frac{1}{6}\{(h_{11}^1h_{22}^2+h_{22}^1h_{11}^2-h_{12}^1h_{21}^2-h_{21}^1h_{12}^2)I^{\mathrm{p}}+(h_{11}^1+h_{22}^1)(h^{(2)})^{\mathrm{p}}$$
$$+(h_{11}^2+h_{22}^2)(h^{(1)})^{\mathrm{p}}\},\quad (h^{(1)})^{\mathrm{p}}=\frac{1}{3}\{(h_{11}^1+h_{22}^1)I^{\mathrm{p}}+(h^{(1)})^{\mathrm{p}}\}.$$

(9)完成了多次碰撞中，夸克的散射矩阵到质子的自旋态的过渡，是使(2)能进行计算的关键步骤．作为例子，列出应用(7)、(9)的几个结果：

$$(\sigma_{n_1}^i)^{\mathrm{p}}=\frac{1}{3}(\cos\theta_1\sigma_n^{\mathrm{p}}+\sin\theta_1\sigma_q^{\mathrm{p}}),$$

$$(\sigma_{n_1}^i\sigma_{n_2}^i)^{\mathrm{p}}=\cos(\theta_2-\theta_1)I^{\mathrm{p}}+\frac{i}{3}\sin(\theta_2-\theta_1)\sigma_k^{\mathrm{p}},$$

$$(\sigma_{n_1}^i\sigma_{n_2}^j)^{\mathrm{p}}=-\frac{1}{3}\cos(\theta_2-\theta_1)I^{\mathrm{p}},\quad (i\neq j)$$

$$(\sigma_{n_1}^i\sigma_{n_2}^i\sigma_{n_3}^i)^{\mathrm{p}}=\frac{1}{3}[\cos(\theta_1-\theta_2+\theta_3)\sigma_n^{\mathrm{p}}+\sin(\theta_1-\theta_2+\theta_3)\sigma_q^{\mathrm{p}}],$$

$$(\sigma_{n_1}^i\sigma_{n_2}^j\sigma_{n_3}^i)^{\mathrm{p}}=\frac{1}{3}[\cos(\theta_3-\theta_2)(\cos\theta_1\sigma_n^{\mathrm{p}}+\sin\theta_1\sigma_q^{\mathrm{p}})],\quad i\neq j$$

$$(\sigma^i_{n_1}\sigma^j_{n_2}\sigma^k_{n_3})^{\mathrm{p}} = -\frac{1}{3}\{\cos(\theta_3-\theta_2)[\cos\theta_1\sigma^{\mathrm{p}}_n + \sin\theta_1\sigma^{\mathrm{p}}_q] + \cos(\theta_2-\theta_1)$$

$$[\cos\theta_3\sigma^{\mathrm{p}}_n + \sin\theta_3\sigma^{\mathrm{p}}_q] + \cos(\theta_1-\theta_3)[\cos\theta_2\sigma^{\mathrm{p}}_n + \sin\theta_2\sigma^{\mathrm{p}}_q]\}. \quad i \neq j \neq k$$

在积分(2)式时,我们将遇到如下形状的多重积分

$$F(g) = \int d^2q_1 d^2q_2 \cdots d^2q_{n-1} g \exp\{-G\}. \tag{10}$$

其中 $d^2q_i = q_i dq_i d\theta_i$; g 可以取为 1, q_i^2, $q_i\cos\theta_i$, $q_iq_j\cos(\theta_i-\theta_j)$ 以及这些因子组成的乘积. G 可以写成: $G = \sum_{i,j=0}^{n-1} a_{ij}\boldsymbol{q}_i\cdot\boldsymbol{q}_j$. 其中 $\boldsymbol{q}_0 = \boldsymbol{q}$; $a_{ij} = a_{ji}$ 是复数,它们由广义形状因子和夸克散射矩阵的参数决定,这些系数是必然满足 $F(g)$ 可积条件的. 对于系数 a_{ij} 作变换 $a'_{ij} = a'_{ji} = a_{ij} - \sum_{m=1}^{i} a'_{im}a'_{mj}/a'_{mm}$. 依次取 $i = 1, 2, \cdots, n-1$, 相应地 $j = i, i+1, \cdots, n-1, 0$; 再取 $i=0, j=0$. 那么我们有:

$$F(1) = \int d^2q_1\cdots d^2q_{n-1}\exp\{-G\} = \pi^{n-1}\prod_{i=1}^{n-1}(a'_{ii})^{-1}\times\exp\{-a'_{00}q^2\}, \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} &F(q_i^2) = -\frac{\partial}{\partial a_{ii}}F(1),\ F(q_i\cos\theta_i) = -\frac{1}{2q}\frac{\partial}{\partial a_{i0}}F(1),\\ &F(q_iq_j\cos(\theta_i-\theta_j)) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a_{ij}}F(1). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

应用(11),(12),原则上可以计算式(2)中的所有积分,使之成为由系数 a_{ij} 组成的代数式. 上述模型还忽略了两质子间的夸克的全同粒子效应.

在本工作过程中,高能所李扬国同志、南京大学于祖荣、王凡同志曾给予有益的指教,谨此表示感谢.

参 考 文 献

[1] K. F. Klenk and A. S. Kanofsky, 1L *Nuovo Cimemto*, **13A** (1973), 446.

[2] D. R. Harrington and A. Pagnamenta, *Phys. Rev.*, **173** (1968), 1599; Y. Takada, *Prog. Theor. Phys.*, **39** (1968), 1536.

GLAUBER QUARK MODEL WITH SPIN EFFECT

Bao Guan-xiong

(*Nanjing University*)

Abstract

In this short paper, we present a method for treating polarized proton beam and polarized target scattering according to the Glauber quark model.