

π 凝聚的相对性半经典理论 (I)

张启仁

(北京大学)

摘 要

对赝标耦合和赝矢耦合, 严格求解了经典 π 场中对称核物质能量与 π 场 Φ 及其波数 k 的关系. 结果表明, 赝标耦合下无 π 凝聚, 赝矢耦合下则可有. 如允许赝矢耦合(它不能重整化), 则 π 凝聚可当作 π -核子 P 波作用的结果而毋需手征对称性. π -核子作用本身会使凝聚的 π 场饱和而毋需引入 π 场的非线性自作用如 Φ^4 项等. 用 Van der Waals 近似考虑了核子排斥心的影响, 发现它导致凝聚 π 场波数的上下限. 如排斥心半径超过一临界值, π 凝聚即不能发生.

一、引 言

核内存在相干 π 介子场的可能性已探讨了多年^[1-7]. 提出了几种能导致这种凝聚的机制. 一种认为它来自 π -核子的 P 波作用^[2-5], 另一种认为它来自手征对称性^[6]. 处理的方法也不尽相同. 有的从研究 π 介子在核物质中的多重散射入手^[4,5], 有的解 π 场中核子的运动方程^[4,6,7], 一般都用了较多的近似. 如对核子运动用非相对性近似^[2-6], 将 π 场 Φ 及其波数 k 当小量作展开^[7]等. 可以说出一些理由论证这类近似, 本文却要证明它们并非必要. 在探讨尚未被实验证实的概念时最好尽量少用近似, 越干净的理论越有说服力, 况且有些近似略去的量似乎很小却可能丢掉实质性的东西. 众所周知, 在自由运动状态附近作微扰可能丢掉束缚态, 对一个多体系作这种展开可能丢掉相变等. 有的理论为了使凝聚的 π 场达到有限的饱和值, 不得不在拉氏函数中引进 Φ^4 项^[5], 可能就是采用了不当近似的结果.

完全不用近似当然不行, π 凝聚即形成大量 π 介子的相干状态, 在这种状态中 π 场基本上是经典的, 量子化仅导致较次要的涨落, 因此, 作为第一步, π 场可不量子化, 这就是我们将采用的主要近似, 也是标题中“半经典”一词的含义, 它的合理性在于研究对象的准经典性质本身. 在这一近似中, 核物质内核子间没有力作用, 因此也没有关联. 为了更接近实际, 用 Van der Waals 近似^[8]考虑了核子排斥心的影响, 它们可看作交换矢量介子导致的核力的唯象表示.

为了集中注意力, 暂考虑只含核子与 π 介子的系统, 且限于对称核物质, 即电荷数为核子数一半的核物质. 拉氏函数及其中的常数取自 π -核子系统的现有理论, 按由简到繁

本文 1979 年 7 月 17 日收到.

1) 这里只引了几篇有代表性的文献, 其它文献大都从其中(特别是 [4, 5] 中)查到.

的次序,先考虑简单的赝标耦合和赝矢耦合,较复杂的情形也在研究中,将在以后陆续发表。

第二节求出 π 场中核子 Dirac 方程的准确解,第三节讨论 π 场中核物质的密度和能量密度。第四节先证明赝标耦合下无 π 凝聚,然后针对赝矢耦合导出核物质中 π 场的方程,并给出 π 凝聚的条件和数值结果,最后第五节为一小结。

二、 π 场中核子的 Dirac 方程及其准确解

采用自然单位 $c = \hbar = 1$; Einstein 求和约定, Dirac^[9]-Pauli^[10] 关于矩阵 α , β , Σ , $\rho_i (i = 1, 2, 3)$, $\gamma_\mu (\mu = 1, 2, 3, 4)$ 和 γ_5 的定义,以及简写 $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ ($\mu = 1, 2, 3, 4$)。

1. 赝标耦合 拉氏函数密度为

$$\mathcal{L} = -\bar{\Psi}(\gamma_\mu \partial_\mu + m - ig\gamma_5 \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\Phi})\Psi - \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi \cdot \partial_\mu \Phi + m_\pi^2 \Phi^2). \dots \quad (1)$$

核子场 Ψ 为同位旋空间的旋量, $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma_4$; π 场 Φ 为同位旋空间的矢量; $\boldsymbol{\tau}$ 为同位旋的三个 Pauli 矩阵; g 为赝标耦合常数: $\frac{g^2}{4\pi} \sim 15$; m 和 m_π 分别为核子和 π 介子的质量,立即得到哈密顿量密度

$$\mathcal{H} = \Psi^\dagger [\boldsymbol{\alpha} \cdot (-i\nabla) + m\beta - g\rho_2 \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\Phi}] \Psi + \frac{1}{2} [\mathcal{P}^2 + (\nabla\Phi)^2 + m_\pi^2 \Phi^2], \quad (2)$$

其中

$$\mathcal{P} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (3)$$

为 Φ 的正则共轭动量。

我们要在一定的核子数密度 n 和电荷数密度 n_s 下研究 π 场的影响。对一定的 n , n_s 一定即同位旋第三分量密度

$$\mathcal{T}_3 = \Psi^\dagger \frac{\tau_3}{2} \Psi - \mathcal{P}_1 \Phi_2 + \mathcal{P}_2 \Phi_1 \quad (4)$$

一定。于是可考虑自由能密度

$$\mathcal{F} = \mathcal{H} + \mu \mathcal{T}_3, \quad (5)$$

其中 μ 为拉氏乘子。基态核物质要求在 n 一定条件下 \mathcal{F} 取极小。由于

$$n = \Psi^\dagger \Psi \quad (6)$$

不显含 Φ , \mathcal{P} , 故可先对它们变分。将 \mathcal{F} 对 \mathcal{P} 变分得

$$\mathcal{P}_1 = \mu \Phi_2, \quad \mathcal{P}_2 = -\mu \Phi_1, \quad \mathcal{P}_3 = 0. \quad (7)$$

将(2)、(4)和(7)代入(5)^[11]

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & \Psi^\dagger \left[\boldsymbol{\alpha} \cdot (-i\nabla) + m\beta - g\rho_2 \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\Phi} + \mu \frac{\tau_3}{2} \right] \Psi \\ & + \frac{1}{2} [(\nabla\Phi)^2 - \mu^2(\Phi_1^2 + \Phi_2^2) + m_\pi^2 \Phi^2]. \end{aligned} \quad (8)$$

将核子场量子化.

$$\Psi = \sum_{\lambda} a_{\lambda} \phi_{\lambda}, \quad (9)$$

$$\{a_{\lambda}, a_{\lambda'}\} = \{a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda'}^{\dagger}\} = 0, \quad \{a_{\lambda}, a_{\lambda'}^{\dagger}\} = \delta_{\lambda\lambda'} \quad (10)$$

其中 ϕ_{λ} 为一组完整正交归一化的 c 数波函数. 由 (8) 知, 显然宜选择 ϕ_{λ} 满足 π 场中的 Dirac 方程

$$\left(\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{P}} + m\beta - g\rho_2 \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\Phi} + \frac{\mu}{2} \tau_3 \right) \phi = \epsilon \phi, \quad (11)$$

下标 λ 已略去, $\hat{\mathbf{P}} = -i\nabla$.

无限大核物质平移对称, 故 π 场可取为平面波

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}) = \phi(i\cos \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{j} \sin \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (12)$$

其中 ϕ 为常数, 代入 (11) 式, 作变换

$$\phi = e^{-i\boldsymbol{\tau}_3 \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}/2} \phi', \quad (13)$$

得

$$\left[\boldsymbol{\alpha} \cdot \left(\hat{\mathbf{P}} - \frac{\boldsymbol{\tau}_3 \mathbf{K}}{2} \right) + m\beta - g\rho_2 \tau_1 \phi + \frac{\mu}{2} \tau_3 \right] \phi' = \epsilon \phi'. \quad (14)$$

左端作用在 ϕ' 上的算符已与位置无关, 故可将 ϕ' 取作 $\hat{\mathbf{P}}$ 的本征函数

$$\phi'_{\mathbf{P}} = U e^{i\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}}, \quad (15)$$

其中 \mathbf{P} 为 $\hat{\mathbf{P}}$ 的本征值, U 为与位置无关的旋量. 代入上式得

$$\left[\boldsymbol{\alpha} \cdot \left(\hat{\mathbf{P}} - \frac{\boldsymbol{\tau}_3 \mathbf{k}}{2} \right) + m\beta - g\rho_2 \tau_1 \phi + \frac{\mu}{2} \tau_3 \right] U = \epsilon U. \quad (16)$$

取 $\mu = 0$, 在附录中将证明它对应对称核物质. 再作变换

$$U = S u, \quad (17)$$

$$S = \sqrt{\frac{A + \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}}{2A}} + i \frac{g\phi \tau_1 \rho_3 \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{k}}{\sqrt{2A(A + \mathbf{P} \cdot \mathbf{k})}}, \quad (18)$$

$$A = \sqrt{(\mathbf{P} \cdot \mathbf{k})^2 + g^2 \phi^2 k^2}. \quad (19)$$

代入 (16) 得

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{Q} + m\beta) u = \epsilon u, \quad (20)$$

其中

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P} + \left(\frac{g^2 \phi^2}{A + \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}} - \frac{\boldsymbol{\tau}_3}{2} \right) \mathbf{k}. \quad (21)$$

(20) 具有自由粒子 Dirac 方程的形式, 因此已被解出. 取正能量解

$$\epsilon = \sqrt{Q^2 + m^2}. \quad (22)$$

2. 赝矢耦合 拉氏函数密度为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\bar{\Psi} \left[\gamma_{\mu} \partial_{\mu} + m + i \frac{f}{m_{\pi}} \gamma_5 \gamma_{\mu} (\partial_{\mu} \boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{\tau}) \right] \Psi \\ & - \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \boldsymbol{\Phi} \cdot \partial_{\mu} \boldsymbol{\Phi} + m_{\pi}^2 \boldsymbol{\Phi}^2), \end{aligned} \quad (23)$$

f 为赝矢耦合常数: $\frac{f^2}{4\pi} = 0.081$, 得哈密顿量密度

$$\mathcal{H} = \Psi^+ \left[\boldsymbol{\alpha} \cdot (-i\nabla) + m\beta + \frac{f}{m_\pi} \boldsymbol{\Sigma} \cdot (\nabla\Phi) \cdot \boldsymbol{\tau} \right] \Psi + \frac{1}{2} \left[\left(\mathcal{D} - \frac{f}{m_\pi} \Psi^+ \boldsymbol{\gamma}_5 \boldsymbol{\tau} \Psi \right)^2 + (\nabla\Phi)^2 + m_\pi^2 \Phi^2 \right], \quad (24)$$

其中

$$\mathcal{D} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{f}{m_\pi} \Psi^+ \boldsymbol{\gamma}_5 \boldsymbol{\tau} \Psi \quad (25)$$

为 Φ 的正则共轲动量。

导致 (4)、(5) 的一段讨论仍适用, (7) 式变为

$$\mathcal{D}_1 = \mu\Phi_2 + \frac{f}{m_\pi} \Psi^+ \boldsymbol{\gamma}_5 \boldsymbol{\tau}_1 \Psi, \quad \mathcal{D}_2 = -\mu\Phi_1 + \frac{f}{m_\pi} \Psi^+ \boldsymbol{\gamma}_5 \boldsymbol{\tau}_2 \Psi, \quad \mathcal{D}_3 = \frac{f}{m_\pi} \Psi^+ \boldsymbol{\gamma}_5 \boldsymbol{\tau}_3 \Psi. \quad (26)$$

将 (24)、(4) 和 (26) 代入 (5) 得

$$\mathcal{H} = \Psi^+ \left\{ \boldsymbol{\alpha} \cdot (-i\nabla) + m\beta + \frac{f}{m_\pi} [\boldsymbol{\Sigma} \cdot (\nabla\Phi) \cdot \boldsymbol{\tau} + \mu\rho_1 (\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\Phi})_3] + \frac{\mu}{2} \boldsymbol{\tau}_3 \right\} \Psi + \frac{1}{2} [(\nabla\Phi)^2 - \mu^2(\Phi_1^2 + \Phi_2^2) + m_\pi^2 \Phi^2]. \quad (27)$$

如前将核子场量子化。现在宜选择 ϕ_λ 满足方程

$$\left\{ \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\boldsymbol{P}} + m\beta + \frac{f}{m_\pi} [\boldsymbol{\Sigma} \cdot (\nabla\Phi) \cdot \boldsymbol{\tau} + \mu\rho_1 (\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\Phi})_3] + \frac{\mu}{2} \boldsymbol{\tau}_3 \right\} \phi = \epsilon\phi, \quad (28)$$

下标 λ 亦已略去。

将 (12) 代入 (28), 作变换

$$\phi = e^{-i\boldsymbol{\tau}_3(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \frac{\pi}{2})/2} \phi' \quad (29)$$

得

$$\left[\boldsymbol{\alpha} \cdot \left(\hat{\boldsymbol{P}} - \frac{\boldsymbol{\tau}_3 \mathbf{k}}{2} \right) + m\beta + \frac{f}{m_\pi} (\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{k} - \mu\rho_1) \phi \boldsymbol{\tau}_1 + \frac{\mu}{2} \boldsymbol{\tau}_3 \right] \phi' = \epsilon\phi'. \quad (30)$$

同样将 ϕ' 取作 $\hat{\boldsymbol{P}}$ 的本征函数, 将 (15) 代入此式得

$$\left[\boldsymbol{\alpha} \cdot \left(\mathbf{P} - \frac{\boldsymbol{\tau}_3 \mathbf{k}}{2} \right) + m\beta + \frac{f}{m_\pi} (\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{k} - \mu\rho_1) \phi \boldsymbol{\tau}_1 + \frac{\mu}{2} \boldsymbol{\tau}_3 \right] U = \epsilon U. \quad (31)$$

同样取 $\mu = 0$, 附录中也将证明它对应对称核物质。再作变换

$$U = S'u, \quad (32)$$

$$S' = S_1 S_2, \quad (33)$$

$$S_1 = \sqrt{\frac{B+1}{2B}} + i \frac{f\phi}{m_\pi} \sqrt{\frac{2}{B(B+1)}} \boldsymbol{\tau}_2 \rho_1, \quad (34)$$

$$S_2 = \sqrt{\frac{A' + \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}'}{2A'}} + i \frac{g'\phi \boldsymbol{\tau}_2 \rho_3 \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{k}}{\sqrt{2A'(A' + \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}')}}, \quad (35)$$

$$B = \sqrt{1 + \frac{4f^2\phi^2}{m_\pi^2}}, \quad (36)$$

$$A' = \sqrt{(\mathbf{P} \cdot \mathbf{k}')^2 + g'^2 \phi^2 k'^2}, \quad (37)$$

$$g' = \frac{2m}{Bm_\pi} f, \quad (38)$$

$$\mathbf{k}' = B\mathbf{k}, \quad (39)$$

得

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{Q} + m'\beta)u = \epsilon u, \quad (40)$$

其中

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P} + \left(\frac{g'^2 \phi^2}{A' + \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}'} - \frac{\tau_3}{2} \right) \mathbf{k}', \quad (41)$$

$$m' = \frac{m}{B}. \quad (42)$$

(40) 亦有自由粒子 Dirac 方程的形式, 因此亦已解出. 同样取正能量解

$$\epsilon = \sqrt{Q^2 + m'^2}. \quad (43)$$

由于 $\phi \approx 0$ 时 $B > 1$, $m' < m$, 故 π 场可减低单核子能量, 使 π 凝聚成为可能. 而这又来源于 (31) 中核子与 π 场的 P 波作用 ($\phi \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{k}$ 项).

(40)、(41) 与 (20)、(21) 很相像. 将后者的 m , g 和 \mathbf{k} 换成 m' , g' 和 \mathbf{k}' 即得到前者. 在讨论给定 \mathbf{k} , ϕ 的 π 场中的核子时它们本来都是常量, 因此对两种耦合可统一处理.

三、 π 场中核物质的密度和能量密度

1. 赝标耦合下的核子数密度 在 π 场中核子不再具有一定动量, 代替它的是两种赝动量 \mathbf{P} 和 \mathbf{Q} . 由于 (13) 的么正性, 可按 \mathbf{P} 数状态数: 对一定 τ_3 , 相空间 \mathbf{P}, \mathbf{r} 附近 $d\mathbf{P}d\mathbf{r}$ 内的状态数为

$$dnd\mathbf{r} = 2 \frac{d\mathbf{P}d\mathbf{r}}{(2\pi)^3}. \quad (44)$$

由于 (22) 具有自由粒子能谱的形式, 应按 Q 计算核子能量. 核子按 Q 由小到大的次序填入, 直到 $Q = Q_F: \sqrt{Q_F^2 + m^2}$ 为填入核子的最大能量. 这两种赝动量的一致 (21), 导致一个变了形的不均匀 Fermi 海

由 (21) 知

$$P_{\parallel} = \pm \sqrt{\left(Q_{\parallel} + \frac{\tau_3}{2} k\right)^2 - g^2 \phi^2}, \quad (45)$$

$$\mathbf{P}_{\perp} = \mathbf{Q}_{\perp} \quad (46)$$

其中 $P_{\parallel}, Q_{\parallel}$ 为 \mathbf{P}, \mathbf{Q} 与 \mathbf{k} 平行的分量, $\mathbf{P}_{\perp}, \mathbf{Q}_{\perp}$ 为 \mathbf{P}, \mathbf{Q} 与 \mathbf{k} 垂直的分量. 故

$$d\mathbf{P} = \frac{Q_{\parallel} + \frac{\tau_3}{2} k}{\sqrt{\left(Q_{\parallel} + \frac{\tau_3}{2} k\right)^2 - g^2 \phi^2}} dQ, \quad (47)$$

从而对一定 \mathbf{k}, ϕ 和 τ_3 , 核子数密度为

$$n_{r_3}(k, \phi, Q_F) = \frac{4}{(2\pi)^3} \int^{Q_F} \frac{Q_{||} + \frac{\tau_3}{2} k}{\sqrt{\left(Q_{||} + \frac{\tau_3}{2} k\right)^2 - g^2 \phi^2}} dQ_{||} \quad (48)$$

与(44)式相比,此式右端多了一个因子2,这是为了计及与 $Q_{||}$ 对应的两个 $P_{||}$ 值((45)右端的±号)。积分区域由条件 $Q \leq Q_F$ 和被积函数取实值决定:当 $Q_F < g\phi - \frac{\tau_3}{2} k$ 时为空集; $-Q_F > g\phi - \frac{\tau_3}{2} k$ 时为以 $Q = 0$ 为心, Q_F 为半径的球;其余情形为这个球的 $Q_{||} \geq g\phi - \frac{\tau_3}{2} k$ 的部分。

取 K 方向为极轴, θ 表 Q 与 k 的交角,由于被积函数与绕 K 的方位角无关

$$\begin{aligned} n_{r_3}(k, \phi, Q_F) &= \frac{1}{\pi^2} \int^{Q_F} \frac{Q_{||} + \frac{\tau_3}{2} k}{\sqrt{\left(Q_{||} + \frac{\tau_3}{2} k\right)^2 - g^2 \phi^2}} Q^2 dQ d\cos\theta \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int^{Q_F} \frac{Q_{||} + \frac{\tau_3}{2} k}{\sqrt{\left(Q_{||} + \frac{\tau_3}{2} k\right)^2 - g^2 \phi^2}} Q dQ dQ_{||}. \end{aligned}$$

先对 $Q_{||}$ 积分,仔细考虑积分限后得

$$n_{r_3}(k, \phi, Q_F) = \frac{1}{\pi^2} \int_{Q_0}^{Q_F} \sqrt{\left(Q_{||} + \frac{\tau_3}{2} k\right)^2 - g^2 \phi^2} Q dQ \quad (49)$$

$$Q_0 = \begin{cases} Q_F & \text{如 } Q_F \leq g\phi - \frac{\tau_3}{2} k \\ -Q_F & \text{如 } -Q_F \geq g\phi - \frac{\tau_3}{2} k \\ g\phi - \frac{\tau_3}{2} k & \text{其它} \end{cases}$$

由此得核子数密度

$$n(K, \phi, Q_F) = n_1(k, \phi, Q_F) + n_{-1}(k, \phi, Q_F)$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \times \begin{cases} 0 & \text{如 } Q_F \leq g\phi - \frac{k}{2} \\ R\left(\frac{k}{2}, g\phi, Q_F\right) - R\left(\frac{k}{2}, g\phi, -Q_F\right) & \text{如 } g\phi - \frac{k}{2} < Q_F \leq \frac{k}{2} - g\phi \\ R\left(\frac{k}{2}, g\phi, Q_F\right) - \frac{k}{4} g^2 \phi^2 \ln(g\phi) & \text{如 } g\phi - \frac{k}{2} < Q_F \leq g\phi + \frac{k}{2} \\ & \wedge Q_F > \frac{k}{2} - g\phi \\ R\left(\frac{k}{2}, g\phi, Q_F\right) + R\left(-\frac{k}{2}, g\phi, Q_F\right) & \text{如 } Q_F > g\phi + \frac{k}{2} \end{cases} \quad (50)$$

其中

$$R(a, b, x) = \frac{1}{3} [(a+x)^2 - b^2]^{3/2} - \frac{a}{2} (a+x) \sqrt{(a+x)^2 - b^2} + \frac{ab^2}{2} \ln [a+x + \sqrt{(a+x)^2 - b^2}]. \quad (51)$$

当 $\phi = 0$ 时 (50) 蜕化为通常 Fermi 气模型的核子数密度公式:

$$n(k, 0, Q_F) = \frac{2}{3\pi^2} Q_F^3. \quad (52)$$

2. 质标耦合下核子系的能量密度 自由能密度 (8) 的第一部分为核子系的自由能密度, $\mu = 0$ 时也就是核子系的能量密度. 核子场按前述方式量子化后, 它就是单位体积内核子能量的和. 给定 τ_3 后得

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\tau_3}(k, \phi, Q_F) &= \int^{Q_F} \sqrt{Q^2 + m^2} dn \\ &= \frac{4}{(2\pi)^3} \int^{Q_F} \sqrt{Q^2 + m^2} \frac{Q_{\parallel} + \frac{\tau_3}{2} k}{\sqrt{\left(Q_{\parallel} + \frac{\tau_3}{2} k\right)^2 - g^2 \phi^2}} dQ, \end{aligned}$$

积分区域同前. 按与由 (48) 到 (49) 相同的考虑得

$$\mathcal{E}_{\tau_3}(k, \phi, Q_F) = \frac{1}{\pi^2} \int_{Q_0}^{Q_F} \sqrt{Q^2 + m^2} \sqrt{\left(Q + \frac{\tau_3}{2} k\right)^2 - g^2 \phi^2} Q dQ. \quad (53)$$

右端积分可用椭圆函数和初等函数表出. 可惜这种表达式并不方便, 以致宁可定义函数

$$F(a, b, x) = \int_{b-a}^x \sqrt{1 + \xi^2} \sqrt{(\xi + a)^2 - b^2} \xi d\xi. \quad (54)$$

将 $\tau_3 = \pm 1$ 的两部分加起来, 得核物质中核子系能量密度

$$\mathcal{E}(k, \phi, Q_F) = \mathcal{E}_1(k, \phi, Q_F) + \mathcal{E}_{-1}(k, \phi, Q_F)$$

$$= \frac{m^4}{\pi^2} \times \begin{cases} 0 & \text{如 } Q_F \leq g\phi - \frac{k}{2} \\ F\left(\frac{k}{2m}, \frac{g\phi}{m}; \frac{Q_F}{m}\right) - F\left(\frac{k}{2m}, \frac{g\phi}{m}; \frac{-Q_F}{m}\right) & \text{如 } g\phi - \frac{k}{2} < Q_F \leq \frac{k}{2} - g\phi \\ F\left(\frac{k}{2m}, \frac{g\phi}{m}; \frac{Q_F}{m}\right) & \text{如 } Q_F > \frac{k}{2} - g\phi \wedge g\phi - \frac{k}{2} \\ & < Q_F \leq g\phi + \frac{k}{2} \\ F\left(\frac{k}{2m}, \frac{g\phi}{m}; \frac{Q_F}{m}\right) + F\left(\frac{-k}{2m}, \frac{g\phi}{m}; \frac{Q_F}{m}\right) & \text{如 } Q_F > g\phi + \frac{k}{2}. \end{cases} \quad (55)$$

每核子平均能量为

$$\bar{\epsilon}(k, \phi, Q_F) = \frac{\mathcal{E}(k, \phi, Q_F)}{n(K, \phi, Q_F)}. \quad (56)$$

将(12)代入(8)的第二部分得 π 场的自由能。再取 $\mu=0$,用(55)代替(8)的第一部分得总自由能密度

$$\mathcal{F}(k, \phi, Q_F) = \mathcal{E}(k, \phi, Q_F) + \frac{1}{2}(k^2 + m_\pi^2)\phi^2. \quad (57)$$

3. 排斥心的影响 设每核子占有体积 $\frac{4\pi}{3}r_0^3$ 。没有排斥心时

$$n(k, \phi, Q_F) = \frac{3}{4\pi r_0^3}, \quad (58)$$

由此定 Q_F 与 r_0 的关系。设有一半径为 r_c 的排斥心。Van der Waals近似^[8]在求核子平均能量 $\bar{\epsilon}$ 时用 $r_0 - 0.8r_c$ 代替 r_0 。于是(58)应改为

$$n(k, \phi, Q_F) = \frac{3}{4\pi(r_0 - 0.8r_c)^3}, \quad (59)$$

由此定 Q_F 与 r_0 的关系。在此情形下核子数密度为

$$n'(k, \phi, Q_F) = \frac{3}{4\pi r_0^3} = \frac{3}{4\pi \left[\left(\frac{4\pi}{3}n \right)^{-\frac{1}{3}} + 0.8r_c \right]^3} = \frac{n(k, \phi, Q_F)}{\left[1 + 0.8 \left(\frac{4\pi}{3}n \right)^{1/3} r_c \right]^3}. \quad (60)$$

核子系能量密度为

$$\mathcal{E}'(k, \phi, Q_F) = \bar{\epsilon}n' = \frac{\mathcal{E}(k, \phi, Q_F)}{\left[1 + 0.8 \left(\frac{4\pi}{3}n \right)^{1/3} r_c \right]^3}. \quad (61)$$

自由能密度为

$$\mathcal{F}'(k, \phi, Q_F) = \mathcal{E}'(k, \phi, Q_F) + \frac{1}{2}(k^2 + m_\pi^2)\phi^2. \quad (62)$$

没有排斥心相当于 $r_c=0$ 。此时 n' , \mathcal{E}' 和 \mathcal{F}' 自动还原为 n , \mathcal{E} 和 \mathcal{F} 。

4. 赝矢耦合 只要(37)–(39)和(42)定义的 A' , g' , K' 和 m' 代替 A , g , k 和 m , 本节全部讨论和公式均可照搬到赝矢耦合的情形。

四、核物质中 π 场的方程, π 凝聚条件

1. 赝标耦合下无 π 凝聚 要判断给定密度的核物质中无 π 凝聚, 须比较该条件下有 π 场和无 π 场两种情形核物质的自由能密度。如无 π 场时自由能密度极小则无 π 凝聚, 反之则有。

赝标耦合下 π 场中核子能谱(22)与自由核子相同, 只是要用赝动量 Q 代替动量。因此核物质中核子系能量密度取决于其中核子态在 Q 空间中的分布。核子态分布越紧凑, 给定密度下的赝 Fermi 动量 Q_F 就越低, 核子系能量密度就越小。在没有 π 场时 $g\phi=0$, (49)式的积分区间和被积函数均达到极大。因此在给定 Q_F 下, 没有 π 场的核物质密度取极大。这就使核物质在给定密度下 Q_F 取极小, 从而使核子系能量密度极小。无 π 场时 π 场能量当然取极小, 故赝标耦合下无 π 场时自由能密度取极小, 即无 π 凝聚。以下只讨论赝矢耦合。

2. π 场的方程 (59) 和 (60) 表明, 一定密度下 r_0 , n 和 n' 均不变. 因此

$$\frac{\partial n}{\partial Q_F} dQ_F + \frac{\partial n}{\partial \phi} d\phi = 0,$$

亦即

$$\frac{dQ_F}{d\phi} = -\frac{\partial n}{\partial \phi} / \frac{\partial n}{\partial Q_F}. \quad (63)$$

一定密度下自由能取极值的条件即为

$$\frac{\partial \mathcal{F}'}{\partial \phi} - \frac{\partial \mathcal{F}'}{\partial Q_F} \frac{\partial n}{\partial \phi} / \frac{\partial n}{\partial Q_F} = 0. \quad (64)$$

利用 (49)–(62) 式此式变为

$$[k^2 + m_\pi^2 - \Pi(K, \phi, Q_F)] \phi = 0, \quad (65)$$

其中极化系数

$$\Pi(k, \phi, Q_F) = \frac{g'^2 m' k}{2\pi^2 B \left[1 + 0.8 \left(\frac{4\pi}{3} n \right)^{1/3} r_c \right]^3}$$

$$\times \begin{cases} 0 & \text{如 } Q_F \leq g'\phi - \frac{k'}{2} \\ W\left(\frac{k'}{2m'}, \frac{g'\phi}{m'}, \frac{Q_F}{m'}\right) - W\left(\frac{k'}{2m'}, \frac{g'\phi}{m'}, \frac{-Q_F}{m'}\right) & \text{如 } g'\phi - \frac{k'}{2} < Q_F \leq \frac{k'}{2} - g'\phi \\ W\left(\frac{k'}{2m'}, \frac{g'\phi}{m'}, \frac{Q_F}{m'}\right) - \sqrt{1 + \left(\frac{Q_F}{m'}\right)^2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{g'\phi}{m'}\right)^2 \right] \ln\left(\frac{g'\phi}{m'}\right) & \\ & \text{如 } Q_F > \frac{k'}{2} - g'\phi \wedge g'\phi - \frac{k'}{2} < Q_F \leq g'\phi + \frac{k'}{2} \\ W\left(\frac{k'}{2m'}, \frac{g'\phi}{m'}, \frac{Q_F}{m'}\right) - W\left(\frac{-k'}{2m'}, \frac{g'\phi}{m'}, \frac{Q_F}{m'}\right) & \text{如 } Q_F > g'\phi + \frac{k'}{2}, \end{cases} \quad (66)$$

$$W(a, b, x) = \sqrt{1+x^2} \left[\left(1 + \frac{b^2}{2}\right) \ln(a+x + \sqrt{(a+x)^2 - b^2}) + \frac{x-a}{2} \sqrt{(a+x)^2 - b^2} \right] - G(a, b; x), \quad (67)$$

$$G(a, b, x) = \int_{b-a}^x (1+a\xi + \xi^2) \sqrt{\frac{1+\xi^2}{(\xi+a)^2 - b^2}} d\xi. \quad (68)$$

函数 G 也可用椭圆函数和初等函数表达, 此处同样毋需这种表达式.

$b=0$ 是 $G(a, b; x)$ 的奇点. 不过奇异性在 (66) 右端两项间恰好抵消. $b=0$ 时 (66) 式趋于下式:

$$\Pi(k, 0, Q_F) = \frac{g'^2 m' k}{2\pi^2 \left[1 + \frac{1.6}{(9\pi)^{1/3}} r_c Q_F \right]^3}$$

$$\times \begin{cases} W_0\left(\frac{k}{2m}, \frac{Q_F}{m}\right) - W_0\left(\frac{k}{2m}, \frac{-Q_F}{m}\right) & \text{如 } Q_F \leq \frac{k}{2} \\ W_0\left(\frac{k}{2m}, \frac{Q_F}{m}\right) - W_0\left(\frac{-k}{2m}, \frac{Q_F}{m}\right) & \text{如 } Q_F > \frac{k}{2} \end{cases} \quad (69)$$

$$W_0(a, x) = \ln \left\{ (x + \sqrt{1+x^2})^a (x+a)^{\sqrt{1+x^2}} \left[\frac{x + \sqrt{1+x^2} + a + \sqrt{1+a^2}}{(x + \sqrt{1+x^2})(a + \sqrt{1+a^2}) - 1} \right]^{\sqrt{1+a^2}} \right\}, \quad (70)$$

$$g = \frac{2mf}{m_\pi} \quad (71)$$

此处的 g 在数值上与上述赝标耦合常数 g 相等。

3. π 凝聚的临界条件 $\phi = 0$ 是 (65) 的解。它表明无 π 场的态使自由能密度取极值。如果这个极值是极小则无 π 凝聚, 是极大则有。 $\phi = 0$ 处 \mathcal{S}' 在一定密度下对 ϕ 的二次微商就是 (65) 式左端的方括号。故有 π 凝聚的充分条件是

$$\Pi(k, 0, Q_F) > k^2 + m_\pi^2. \quad (72)$$

临界点由

$$\Pi(k, 0, Q_F) = k^2 + m_\pi^2 \quad (73)$$

决定。对一定 k , (73) 可定出临界 Q_F 从而定出临界密度。对不同 k 定出的临界密度不同, 其中的最小值是真正的临界密度。图 1 给出了数值计算的结果。

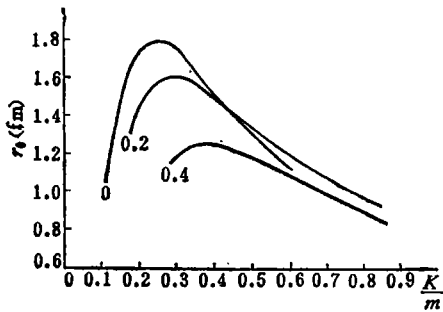


图 1 临界密度 $n_0 = 3/4\pi r_c^3$ 与 π 场波数 k 和核子排斥心半径 (曲线旁的数字, 以 fm 为单位) 的关系。

4. π 凝聚的饱和条件 (65) 式在 $\phi_0 > 0$ 处有另一解

$$\Pi(k, \phi_0, Q_F) = k^2 + m_\pi^2. \quad (74)$$

(72) 和 (74) 式一起表明在给定密度下, 在区间 $0 \leq \phi \leq \phi_0$ 中 Π 随 ϕ 的增加而减小,

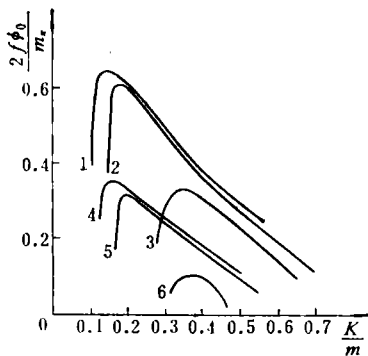


图 2 饱和 π 场 ϕ_0 与波数 k , 核子数密度 $n = 3/4\pi r_0^3$ 和排斥心半径 r_c 的关系。曲线 1—3: $r_0 = 1\text{fm}$, r_c 分别为 0, 0.2, 0.4 fm, 曲线 4—6: $r_0 = 1.2049\text{fm}$, r_c 分别为 0, 0.2, 0.4fm

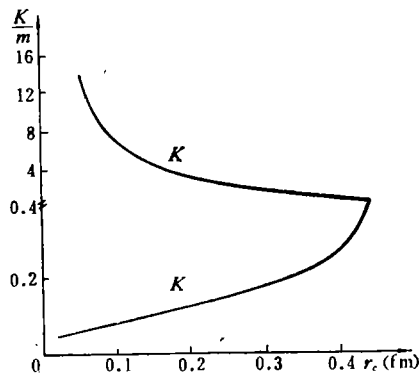


图 3 凝聚 π 场波数的上限 k_+ 和下限 k_- 与排斥心半径 r_c 的关系。曲线与纵轴围成的区域中可发生 π 凝聚

(65) 左端是 ϕ 的升函数。因此, 给定密度下自由能在 $\phi = \phi_0$ 处不是取极大, 除个别取稳定值的情形外应当取极小。数值计算表明, 在所考虑的情形中它都取极小。故 ϕ_0 是 π 凝聚中达到的 π 场的饱和值。图 2 给出了不同条件下 ϕ_0 的数值结果。

5. 凝聚 π 场波数的上下限 当 $Q_F > \frac{k}{2}$ 时

$$\Pi(k, 0, Q_F) = \frac{g^2 k}{2\pi^2 \left[1 + \frac{1.6}{(9\pi)^{1/3}} r_c Q_F\right]^3} \ln \left\{ \left(\frac{Q_F + \sqrt{Q_F^2 + m^2}}{m} \right)^k \left(\frac{2Q_F + k}{2Q_F - k} \right)^{\sqrt{Q_F^2 + m^2}} \right. \\ \left. \times \left[\frac{Q_F(Q_F + \sqrt{Q_F^2 + m^2})(\sqrt{k^2 + 4m^2} - k) - m^2 k}{Q_F(Q_F + \sqrt{Q_F^2 + m^2})(\sqrt{k^2 + 4m^2} + k) + m^2 k} \right]^{\frac{\sqrt{k^2 + 4m^2}}{2}} \right\}. \quad (75)$$

对任一给定 $k > 0$, 当 $Q_F \rightarrow \infty$ 时, “ln”号下第一因子趋于无穷, 后二因子趋于常数。故无排斥心时, 对任一给定 $k > 0$ 总可找到足够大的 Q_F 满足条件 (72)。即只要密度足够高, 任何波数的 π 场均可凝聚。

排斥心使情形发生质的变化。此时 (75) 右端对数前的因子也与 Q_F 有关, 且它随 Q_F 增加而下降的速度比对数因子上升的速度快, 因而使 $\Pi(k, 0, Q_F)$ 作为 Q_F 的函数有一极大值 $\Pi_m(k)$ 。只有当 k 满足条件

$$\Pi_m(k) > k^2 + m^2 \quad (76)$$

时, 给定 k 的 π 场才能凝聚。这就导致凝聚 π 场波数的上下限 $k_>$ 和 $k_<$ 。它们分别由条件

$$\Pi_m(k_>) = k_>^2 + m^2, \quad \left. \frac{d\Pi_m}{dk} \right|_{k=k_>} < 2k_> \quad (77)$$

和

$$\Pi_m(k_<) = k_<^2 + m^2, \quad \left. \frac{d\Pi_m}{dk} \right|_{k=k_<} > 2k_< \quad (78)$$

决定。图 3 给出了由此算得的 $k_>$ 和 $k_<$ 与排斥心半径 r_c 的关系。曲线 $k_>(r_c)$ 与 $k_<(r_c)$ 的汇合处决定排斥心半径的一个临界值。如排斥心半径大于此值, π 凝聚即不能发生。对简单赝矢耦合算得此值为 0.44fm。

五、结 语

通过对 π 场中核子 Dirac 方程的准确求解和对由此得到的核子能量准确求积, 可在半经典近似范围内求出 π 场中核物质能量密度和 π 场的准确关系, 从而求出核物质中 π 场的方程及其解。用这种方法讨论简单赝标耦合下的对称核物质, 发现它不可能有 π 凝聚。用它讨论简单赝矢耦合下的对称核物质, 发现它可以有 π 凝聚。这种凝聚是 π -核子 P 波作用的结果。

π -核子作用本身就使理论成为非线性的。它表现为极化系数 $\Pi(k, \phi, Q_F)$ 与 π 场值 ϕ 有关。这种非线性可导致凝聚 π 场的饱和。因此毋需像 Migdal^[5] 那样引入 π 场的 ϕ^4 自作用。

排斥心导致凝聚 π 场波数的上下限。如排斥心半径大于一临界值,对简单赝矢耦合下的对称核物质, π 凝聚也会变得不可能。这一结果是用 Van der Waals 近似得到的。这种近似较粗糙。如果对核子间的关联作更认真的考虑,情形或许会缓和些。

本文主要目的是用简单例子探讨研究 π 凝聚的理论方法。因此,数值结果只能作参考。重要的是这种在半经典近似范围内求准确解的方法可用于更实际的情形,由此可能得到较可信的数值结果。这方面的工作正在进行中。

附录 A $\mu = 0$ 相当于对称核物质的证明

1. 赝标耦合 由(4)、(7)得 $\mu = 0$ 时

$$\mathcal{F}_3 = \bar{\mathcal{F}}_3 = \psi^\dagger \frac{\tau_3}{2} \psi = \sum_{\lambda} \psi_{\lambda}^\dagger \frac{\tau_3}{2} \psi_{\lambda} \quad (\text{A.1})$$

经变换(13), (17)–(19)得

$$\mathcal{F}_3 = \Sigma U^{\dagger} S^{-1} \frac{\tau_3}{2} S U = \sum_{P, \tau_3, \sigma} \frac{1}{2A} u_{Q\tau_3, \sigma}^\dagger (P \cdot K \tau_3 - g\phi \tau_3 \rho_3 \Sigma \cdot k) u_{Q\tau_3, \sigma} \quad (\text{A.2})$$

σ 为自旋指标。由于 $u_{Q\tau_3, \sigma}$ 有一定 τ_3 , (A.2)右端第二项无贡献。(45)表明 $\pm P_i$ 对应同一 Q , 故对 P 求和后(A.2)右端第一项的贡献也是零:

$$\mathcal{F}_3 = 0. \quad (\text{A.3})$$

然电荷数密度

$$n_z = \mathcal{F}_3 + \frac{n}{2}. \quad (\text{A.4})$$

故 $\mathcal{F}_3 = 0$ 意即 $n_z = \frac{n}{2}$: $\mu = 0$ 相当于对称核物质。

2. 赝矢耦合 由(4)、(26)得 $\mu = 0$ 时

$$\mathcal{F}_3 = \bar{\mathcal{F}}_3 = \psi^\dagger \left[\frac{\tau_3}{2} - \frac{f}{m_\pi} (\Phi \times \tau)_3 \rho_1 \right] \psi = \sum_{\lambda} \psi_{\lambda}^\dagger \left[\frac{\tau_3}{2} - \frac{f}{m_\pi} (\Phi \times \tau)_3 \rho_1 \right] \psi_{\lambda}. \quad (\text{A.5})$$

经变换(29), (32)–(39)得

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_3 &= \Sigma U^{\dagger} S'^{-1} \left(\frac{\tau_3}{2} - \frac{f\phi}{m_\pi} \tau_1 \rho_1 \right) S' U \\ &= \sum_{P, \tau_3, \sigma} \frac{1}{2A} u_{Q\tau_3, \sigma}^\dagger (P \cdot K' \tau_3 + g' \phi \tau_1 \rho_3 \Sigma \cdot K') u_{Q\tau_3, \sigma} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

同样由(A.4)得 $n_z = \frac{n}{2}$: $\mu = 0$ 相当于对称核物质。

附录 B (49)式的证明

如 $Q_F \leq g\phi - \frac{\tau_3}{2} k$ 则由对积分区域的规定知

$$\int_{Q_F}^{Q_1 + \frac{\tau_3}{2} K} \frac{Q_1 + \frac{\tau_3}{2} K}{\sqrt{(Q_1 + \frac{\tau_3}{2} K)^2 - g^2 \phi^2}} Q dQ dQ_1 = 0$$

以下只考虑 $Q_F > g\phi - \frac{\tau_3}{2} k$ 的情形。

如 $g\phi \geq \frac{\tau_3}{2}k$ 则

$$\begin{aligned} \int^{Q_F} \frac{Q_1 + \frac{\tau_3}{2}k}{\sqrt{\left(Q_1 + \frac{\tau_3}{2}k\right)^2 - g^2\phi^2}} QdQdQ_1 &= \int_{g\phi - \frac{\tau_3}{2}k}^{Q_F} QdQ \int_{g\phi - \frac{\tau_3}{2}k}^Q \frac{Q_1 + \frac{\tau_3}{2}k}{\sqrt{\left(Q_1 + \frac{\tau_3}{2}k\right)^2 - g^2\phi^2}} dQ_1 \\ &= \int_{g\phi - \frac{\tau_3}{2}k}^{Q_F} \sqrt{\left(Q + \frac{\tau_3}{2}k\right)^2 - g^2\phi^2} QdQ. \end{aligned}$$

如 $g\phi < \frac{\tau_3}{2}k \wedge Q_F > \frac{\tau_3}{2}k - g\phi$ 则

$$\begin{aligned} \int^{Q_F} \frac{Q_1 + \frac{\tau_3}{2}k}{\sqrt{\left(Q_1 + \frac{\tau_3}{2}k\right)^2 - g^2\phi^2}} QdQdQ_1 &= \int_{\frac{\tau_3}{2}k - g\phi}^{Q_F} \sqrt{\left(Q + \frac{\tau_3}{2}k\right)^2 - g^2\phi^2} QdQ \\ &\quad + \int_0^{\frac{\tau_3}{2}k - g\phi} QdQ \int_{-Q}^Q \frac{Q_1 + \frac{\tau_3}{2}k}{\sqrt{\left(Q_1 + \frac{\tau_3}{2}k\right)^2 - g^2\phi^2}} dQ_1 \\ &= \int_{\frac{\tau_3}{2}k - g\phi}^{Q_F} \sqrt{\left(Q + \frac{\tau_3}{2}k\right)^2 - g^2\phi^2} QdQ + \int_0^{\frac{\tau_3}{2}k - g\phi} \left[\sqrt{\left(\frac{\tau_3}{2}k + Q\right)^2 - g^2\phi^2} \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\left(\frac{\tau_3}{2}k - Q\right)^2 - g^2\phi^2} \right] QdQ = \int_{g\phi - \frac{\tau_3}{2}k}^{Q_F} \sqrt{\left(Q + \frac{\tau_3}{2}k\right)^2 - g^2\phi^2} QdQ. \end{aligned}$$

如 $Q_F \leq \frac{\tau_3}{2}k - g\phi$ 则

$$\begin{aligned} \int^{Q_F} \frac{Q_1 + \frac{\tau_3}{2}k}{\sqrt{\left(Q_1 + \frac{\tau_3}{2}k\right)^2 - g^2\phi^2}} QdQdQ_1 &= \int_0^{Q_F} \left[\sqrt{\left(\frac{\tau_3}{2}k + Q\right)^2 - g^2\phi^2} \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\left(\frac{\tau_3}{2}k - Q\right)^2 - g^2\phi^2} \right] QdQ = \int_{-Q_F}^{Q_F} \sqrt{\left(Q + \frac{\tau_3}{2}k\right)^2 - g^2\phi^2} QdQ. \end{aligned}$$

参 考 文 献

- [1] A. B. Migdal, *ЖЭТФ*, **61** (1971), 2209.
- [2] D. P. Sawyer, *Phys. Rev. Lett.*, **29**(1972), 382.
- [3] D. J. Scalapino, *Phys. Rev. Lett.*, **29**(1972), 386.
- [4] G. E. Brown and W. Weise, *Phys. Repot.*, **27C**(1976), 1.
- [5] A. B. Migdal, *Rev. Mod. Phys.*, **50**(1978), 107.
- [6] D. K. Campbell, R. F. Dashen and J. T. Manassah, *Phys. Rev.*, **D12**(1975), 979.
- [7] И. В. Криве и Е. М. Чудновский, *ЖЭТФ*, **74**(1978), 421.
- [8] A. Bohr and B. R. Mottelson, *Nuclear Structure* (Benjamin, New York, 1969), 256.
- [9] P. A. M. Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics* 4th edition (1958).
- [10] W. Pauli, *Handbuch Der Physik XXIV/1*(1933), 83

RELATIVISTIC SEMICLASSICAL THEORY OF CONDENSATION (I)

ZHANG QI-REN

(*Peking University*)

ABSTRACT

Exact relations between the energy of a symmetric nuclear matter loaded in a classical π field and the value Φ and wave number k of this π field were obtained for pseudoscalar coupling and pseudovector coupling. Results show that there is no π condensation under pseudoscalar coupling. If pseudovector coupling (which is not renormalizable) were permitted, π condensation emerges as a result of π nucleon P wave interaction, and the chiral symmetry is not necessary. π nucleon interaction itself leads to saturation of the condensed π field. Nonlinear selfinteractions of π field, such as Φ^4 term and so on, are not necessary. The influence of nucleonic repulsive core were considered under Van der Waals approximation. It leads to upper and lower limits on wave numbers of the condensed π fields. If the radius of the repulsive core were larger than a critical value, π condensation becomes impossible again.