

高速转动原子核的速度场分布

吴锡真 张锡珍 卓益忠 冯仁发

(中国科学院原子能研究所)

摘 要

本文叙述了在速度各向同性和密度与位一致两种自洽条件下,由转动各向异性谐振子波函数的严格解计算了转动原子核的速度流;研究了核在高速转动时速度流的特点,并讨论了自洽条件的影响。

一、引 言

高速转动原子核的运动形态是当前理论和实验上感兴趣的课题。实验上通过观测横向电子散射的形状因子,有可能对转动原子核的流进行直接测量^[1]。无疑,在实验和理论上对这种速度流的研究将对高自旋态会有更深刻、更本质的理解。

用各向异性简谐振子势研究转动原子核的速度流已有一些文章^[2,3]。在所有这些工作中,原子核的转动波函数都由微扰论得到,即只适用低速转动。另外,他们的讨论都是对较轻的原子核,在速度场的分布图上发现有许多旋涡。他们的主要目的是揭出这种量子流体的速度场与经典转动速度场的差别。本文的主要特点之一是我们采用严格的转动波函数(即转动各向异性谐振子的严格解),所以它不但适用于低速转动,也适用于高速转动的情况。另外,对于高速转动原子核的自洽条件,目前也有不同的处理^[4,5],本文在角动量确定的条件下,由求原子核能量的最低态而给出了自洽条件,在略去 $\Delta N = 2$ 的耦合时,这种自洽条件与[4]的结果相一致。对于各种不同的自洽条件对速度流的影响,本文也作了讨论。最后,本文计算了较重的原子核,发现速度场的分布图上旋涡消失。可以看出旋涡只有在较轻的原子核中才出现。

文章的第二节给出转动各向异性简谐振子的严格解及速度分布表达式,第三节给出自洽条件,第四节给出了计算结果和讨论。

二、转动各向异性谐振子的严格解及速度分布表达式

在推转模型中,绕1轴转动的原子核的哈密顿量¹⁾

$$H = H_0 - \omega_r I_1 = \sum_i h_i. \quad (1)$$

本文1980年3月20日收到。

1) 本节所列举的一些公式和坐标空间的各向异性谐振子波函数引自文献[6]。

用各向异性谐振子势, 单粒子哈密顿量写成

$$h_i = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m(\omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2 + \omega_3^2 x_3^2) - \omega_{cr}(x_2 p_3 - x_3 p_2), \quad (2)$$

令
$$q_i = \sqrt{\frac{m\omega_i}{\hbar}} x_i$$

且
$$c_i = \sqrt{\frac{1}{2}} \left(q_i + \frac{\partial}{\partial q_i} \right), \quad c_i^+ = \sqrt{\frac{1}{2}} \left(q_i - \frac{\partial}{\partial q_i} \right),$$

则
$$h_i = \hbar\omega_1 \left(c_1^+ c_1 + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_2 \left(c_2^+ c_2 + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_3 \left(c_3^+ c_3 + \frac{1}{2} \right) - i\hbar S(c_3^+ c_2 - c_2^+ c_3) - i\hbar D(c_2^+ c_3^+ - c_2 c_3), \quad (3)$$

其中

$$S = \omega_{cr} \frac{\omega_1 + \omega_3}{2(\omega_2\omega_3)^{1/2}}, \quad D = \omega_{cr} \frac{\omega_3 - \omega_2}{2(\omega_2\omega_3)^{1/2}},$$

包含 S 的项是 $\Delta N = 0$ 的项, 而包括 D 的项是 $\Delta N = 2$ 的项.

若定义算符

$$\alpha_k = \sum_{m=2}^3 (\lambda_{mk}^* c_m + \mu_{mk}^* c_m^+), \quad \alpha_k^+ = \sum_{m=2}^3 (\lambda_{mk} c_m^+ + \mu_{mk} c_m),$$

且要求

$$[\alpha_k, \alpha_{k'}^+] = \delta_{kk'}, \quad [\alpha_k, \alpha_{k'}] = [\alpha_k^+, \alpha_{k'}^+] = 0,$$

则矩阵 λ, μ 满足关系:

$$\lambda\lambda^+ - \mu\mu^+ = 1, \quad \text{和} \quad \lambda\tilde{\mu} = \mu\tilde{\lambda}.$$

由方程

$$[\alpha_k, h_i] = \hbar Q_k \alpha_k$$

得
$$Q_k^2 = \frac{1}{2} (\omega_2^2 + \omega_3^2) + \omega_{cr}^2 \pm \frac{1}{2} [(\omega_2^2 - \omega_3^2)^2 + 8\omega_{cr}^2(\omega_2^2 + \omega_3^2)]^{1/2}$$

和矩阵 λ, μ ,

$$h_i = \hbar\omega_1 \left(\hat{n}_1 + \frac{1}{2} \right) + \hbar Q_2 \left(\hat{n}_\alpha + \frac{1}{2} \right) + \hbar Q_3 \left(\hat{n}_\beta + \frac{1}{2} \right). \quad (4)$$

相应的波函数在坐标表象中的表达式变为^[6]

$$\langle q_2 q_3 | n_2 n_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi |\det v| 2^{n_2+n_3} n_2! n_3!}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} q \cdot v^{-1*} u^* \cdot q \right\} \cdot H_{n_2, n_3}(q_2, q_3), \quad (5)$$

其中

$$H_{n_2, n_3}(q_2, q_3) = \sum_s \frac{(-1)^s n_2! n_3! (A_{23} + A_{32})^s}{s! (n_2 - s)! (n_3 - s)!} (\sqrt{A_{22}})^{n_2 - s} \times (\sqrt{A_{33}})^{n_3 - s} H_{n_2 - s} \left(\frac{y_2}{\sqrt{A_{22}}} \right) H_{n_3 - s} \left(\frac{y_3}{\sqrt{A_{33}}} \right), \quad (6)$$

$$A = vv^{*-1}, \quad q_k = \sum_i (v^+)_{ki} y_i, \quad q = \begin{pmatrix} q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \quad u = \lambda + \mu, \quad v = \lambda - \mu,$$

$\langle q_1 | n_1 \rangle$ 不变.

利用密度流算符得到各单粒子的速度分布, 再对粒子求和, 得到核的速度流分布公式

为

$$V_2 = \left(\frac{\hbar\omega_2}{M}\right)^{1/2} \sum_1^A \frac{\langle q_1|n_1\rangle\langle q_1|n_1\rangle^*}{n_2!n_3!2^{n_2+n_3}} \{N_{23}q_3 * R_e(H_{n_2,n_3}H_{n_2,n_3}^*) \\ - n_2c_{22}I_m(H_{n_2,n_3}H_{n_2,n_3-1}^* - H_{n_2,n_3}^*H_{n_2,n_3-1}) \\ - n_3c_{32}I_m(H_{n_2,n_3}H_{n_2,n_3-1}^* - H_{n_2,n_3}^*H_{n_2,n_3-1})\} \\ \left/ \sum_1^A \frac{\langle q_1|n_1\rangle\langle q_1|n_1\rangle^*}{n_2!n_3!2^{n_2+n_3}} R_e(H_{n_2,n_3}H_{n_2,n_3}^*), \right. \quad (7)$$

$$V_3 = \left(\frac{\hbar\omega_3}{M}\right)^{1/2} \sum_1^A \frac{\langle q_1|n_1\rangle\langle q_1|n_1\rangle^*}{n_2!n_3!2^{n_2+n_3}} \{N_{32}q_2 * R_e(H_{n_2,n_3}H_{n_2,n_3}^*) \\ + n_2c_{23}R_e(H_{n_2,n_3}H_{n_2-1,n_3}^* + H_{n_2,n_3}^*H_{n_2-1,n_3}) \\ + n_3c_{33}R_e(H_{n_2,n_3}H_{n_2,n_3-1}^* + H_{n_2,n_3}^*H_{n_2,n_3-1})\} \\ \left/ \sum_1^A \frac{\langle q_1|n_1\rangle\langle q_1|n_1\rangle^*}{n_2!n_3!2^{n_2+n_3}} R_e(H_{n_2,n_3}H_{n_2,n_3}^*), \right. \quad (8)$$

其中 $c_{ij} = \partial y_i / \partial q_j$ $i, j = 2, 3$; $v^{-1}u^* = \begin{pmatrix} N_{22} & -iN_{23} \\ -iN_{32} & -N_{33} \end{pmatrix}$.

三、自洽条件

在研究核旋转问题中,普遍采用绝热近似^[4],即认为核的转动是慢慢加入的,以至于保持核的组态不变(即 $\hat{n}_\alpha = \hat{n}_2$, $\hat{n}_\beta = \hat{n}_3$),但核的形状要发生变化(即 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 改变).在计算速度分布时,为了决定不同转动速度下的核形状,我们采用了两种类型的自洽条件:

1. 密度和位相一致的自洽条件(以下简称密度自洽条件),这可由在确定的总角动量和体积守恒条件下,取体系能量最低的态而得到,利用转动谐振子波函数的精确解可以得到公式

$$\omega_1\Sigma_1 = \omega_2(A^2\Sigma_2 + B^2\Sigma_3) = \omega_3(C^2\Sigma_2 + D^2\Sigma_3) \quad (9)$$

其中
$$\Sigma_i = \sum_{k=1}^A \left(n_i + \frac{1}{2} \right)_k \quad i = 1, 2, 3.$$

n_i 是 i 轴方向的谐振子量子数

$$A^2 = \lambda_{22}^*\lambda_{22} + \mu_{22}^*\mu_{22} - \lambda_{22}^*\mu_{22} - \lambda_{22}\mu_{22}^*$$

$$B^2 = \lambda_{32}^*\lambda_{32} + \mu_{32}^*\mu_{32} - \lambda_{32}^*\mu_{32} - \lambda_{32}\mu_{32}^*$$

$$C^2 = \lambda_{23}^*\lambda_{23} + \mu_{23}^*\mu_{23} - \lambda_{23}^*\mu_{23} - \lambda_{23}\mu_{23}^*$$

$$D^2 = \lambda_{33}^*\lambda_{33} + \mu_{33}^*\mu_{33} - \lambda_{33}^*\mu_{33} - \lambda_{33}\mu_{33}^*$$

当体系没有转动或有转动但忽略 $\Delta N = 2$ 的项时,这个条件退化为[4]中给出的相应条件.在低速转动时,它能给出刚体转动惯量,但在高速时则不然.

2. 速度各向同性自洽条件(以下简称速度自洽条件)^[5],它的形式是: $\Sigma_1\omega_1 = \Sigma_2\omega_2 = \Sigma_3\omega_3$.这个条件在谐振子模型下,总能给出刚体转动惯量.

当转动速度不高时,这个条件和密度自洽条件是近似相同的,但在高速转动时,两者

却有明显的差别。

四、结果和讨论

我们对 ^{168}Er 进行了计算。首先研究在各种转动速度下, 不同自洽条件给出的核形状的差别。为了观察 $\Delta N = 2$ 项的影响, 我们也引用了 [4] 中给出的没有 $\Delta N = 2$ 项的密度自洽条件。计算结果见下表

$\hbar\omega_{cr}$ (MeV)	转动频率 $1/10^{-22}$ 秒	速度自洽条件 ($1/10^{-22}$ 秒)			[4] 中的自洽条件 ($1/10^{-22}$ 秒)			本文密度自洽条件 ($1/10^{-22}$ 秒)		
		ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
0.001	1.519×10^{-4}	1.412	1.412	0.7211	1.413	1.412	0.7211	1.412	1.412	0.7210
0.15	0.02279	1.412	1.412	0.722	1.416	1.394	0.7287	1.413	1.412	0.7214
1.5	0.2279	1.412	1.322	0.8147	1.439	1.266	0.7897	1.437	1.334	0.7503
2.25	0.3418	1.412	1.116	1.088	1.446	1.218	0.8168	1.456	1.280	0.7717
2.5	0.3798	1.412	1.055	1.055	1.448	1.204	0.8248	1.463	1.271	0.7797

从表中可见, 在低速转动时, 三种自洽条件给出的核位形状几乎相同, 在 $\hbar\omega_{cr} = 2.25\text{MeV}$ 时, 速度自洽条件给出绕转动轴旋转对称的扁椭球核位 ($\omega_2/\omega_3 = 1$), 而 [4] 中的密度自洽条件给出 $\omega_2/\omega_3 \approx 1.5$, 包括 $\Delta N = 2$ 项的密度自洽条件给出的 $\omega_2/\omega_3 = 1.7$ 。当 $\hbar\omega_{cr}$ 为其他比较大的数值时, 也看到同样的规律: 就是速度自洽条件的核形状最接近旋转扁椭球, 相应于核最易变形, [4] 中的密度自洽条件相应于核不易变形, 包括 $\Delta N = 2$ 项的密度自洽条件相应于核最难变形。

速度和密度两种自洽条件在低速转动下给出几乎相同的速度分布。但在高速转动时则不同。比较图 1(d) 和 2(d), 这两个图都是在 1 轴坐标为 0 的平面上。图 1(d) 用速度自洽条件计算, 图 2(d) 用密度自洽条件计算, 两者的转动频率相同, 从这两个图可以看出: 在 $\hbar\omega_{cr} = 2.25\text{MeV}$ 时, 速度自洽条件给出了的流场没有紊乱流, 而密度自洽条件则得仍有紊乱流的速度分布, 这个差别反映了研究高速旋转时, 自洽条件是十分重要的。

现在研究图 1(a), 1(b), 1(c), 1(d), 这组图都是在速度自洽条件下得到的。它们相应的转动频率分别是 0.001, 0.15, 1.5, 2.25 MeV。从这些速度分布图上可以看出, 虽然速度场的分布有非规则性(即紊乱的流动), 但没有在 [2] 和 [3] 中所得到的旋涡(速度场的奇点)存在。这是由于速度场的奇点完全由密度分布的零点决定。对于较轻的原子核, 密度分布有可能出现零点, 而对于较重的原子核 ($A = 168$), 在原子核的半径范围内, 并不存在密度的零点, 所以速度场的分布图上有旋涡只是轻核的特征。

从图 1(a) 和 1(b) 可见, 在低速转动下速度场分布图上存在非规则性。随着转动频率的增加, 这种非规则性逐渐减少。在转动频率很大以后, 速度场的非规则性完全消失, 变成刚体型的速度分布, 但每点速度数值并不完全是刚体值。在密度自洽下, 我们也得到一组图 2(c), 2(d), 2(f)。它们相应的转动频率 $\hbar\omega_{cr} = 1.5, 2.25, 2.5\text{MeV}$, 其他条件与第一组图相同。从这一组图我们也看到, 随着转动频率的增加速度分布的非规则性逐渐消失。因此可以得到一个结论: 即无论在那种自洽条件下, 高速转动时, 都能得到刚体型的

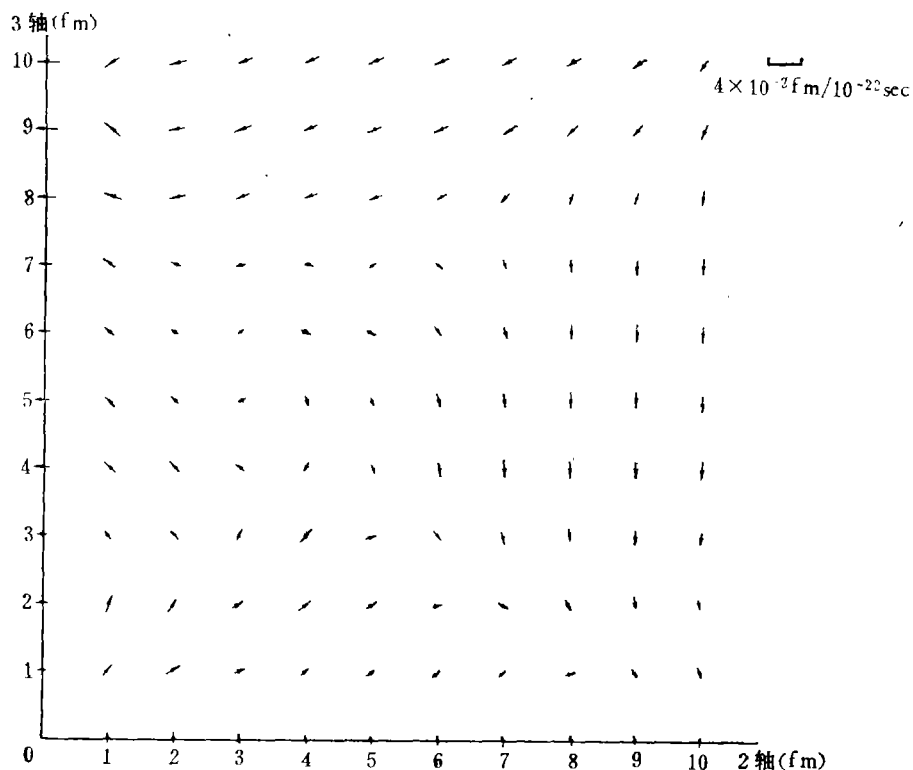


图 1(a) ^{168}Er 在空间坐标系中,在 1 轴坐标为 0 的 2 轴, 3 轴平面上的速度分布. 用速度各向同性自治条件. 转动频率 $\hbar\omega_c$ 为 0.001 MeV. 图中的速度标度为 $4 \times 10^{-22} \text{fm}/10^{-22} \text{秒}$

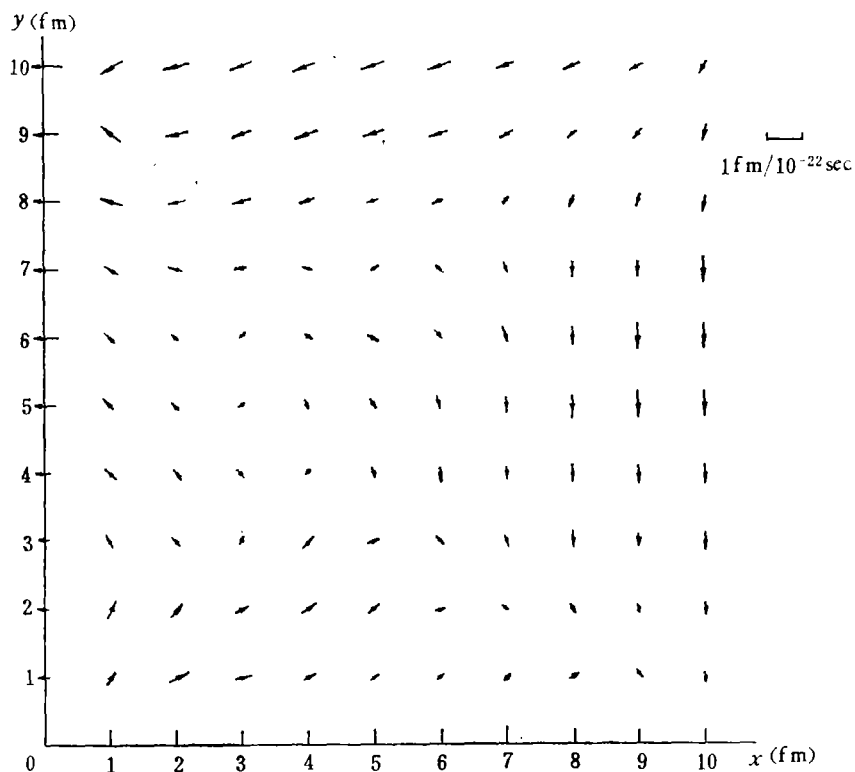


图 1(b) ^{168}Er 的速度分布. 转动频率 $\hbar\omega_c$ 为 0.15 MeV. 图中速度标度为 $1 \text{fm}/10^{-22} \text{秒}$, 其他条件同图 1(a)

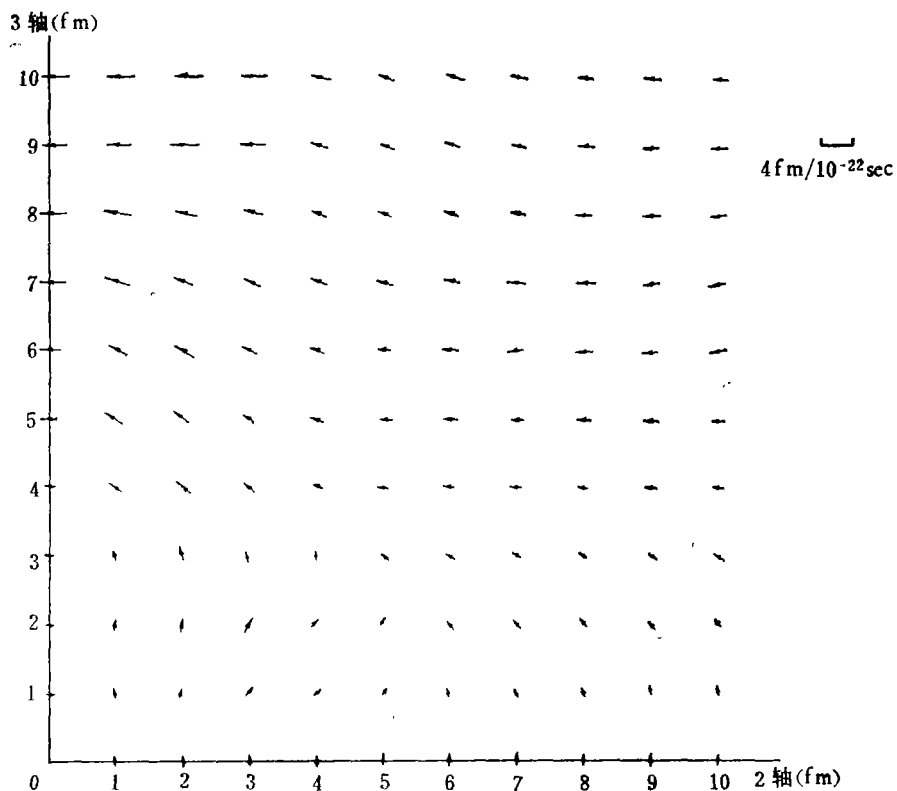


图 1(c) ^{168}Er 的速度分布. 转动频率 $\hbar\omega_c$ 为 1.5MeV . 图中速度标度为 $4\text{fm}/10^{-22}$ 秒, 其他条件同图 1(a)

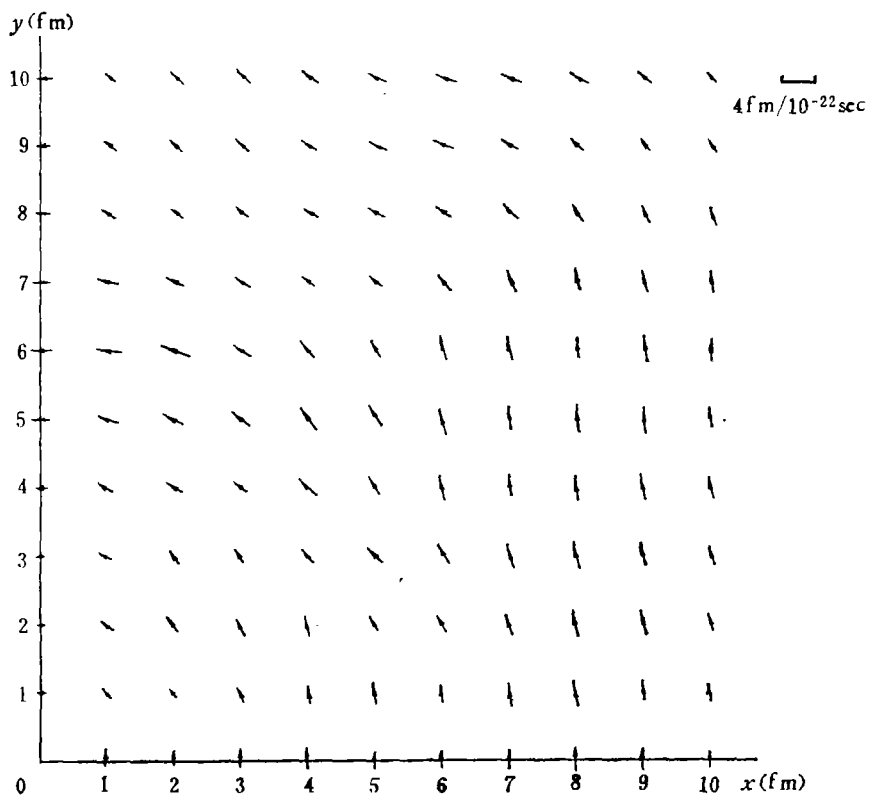


图 1(d) ^{168}Er 的速度分布. 转动频率 $\hbar\omega_c$ 为 2.25MeV . 图中速度标度为 $4\text{fm}/10^{-22}$ 秒, 其他条件同图 1(a)

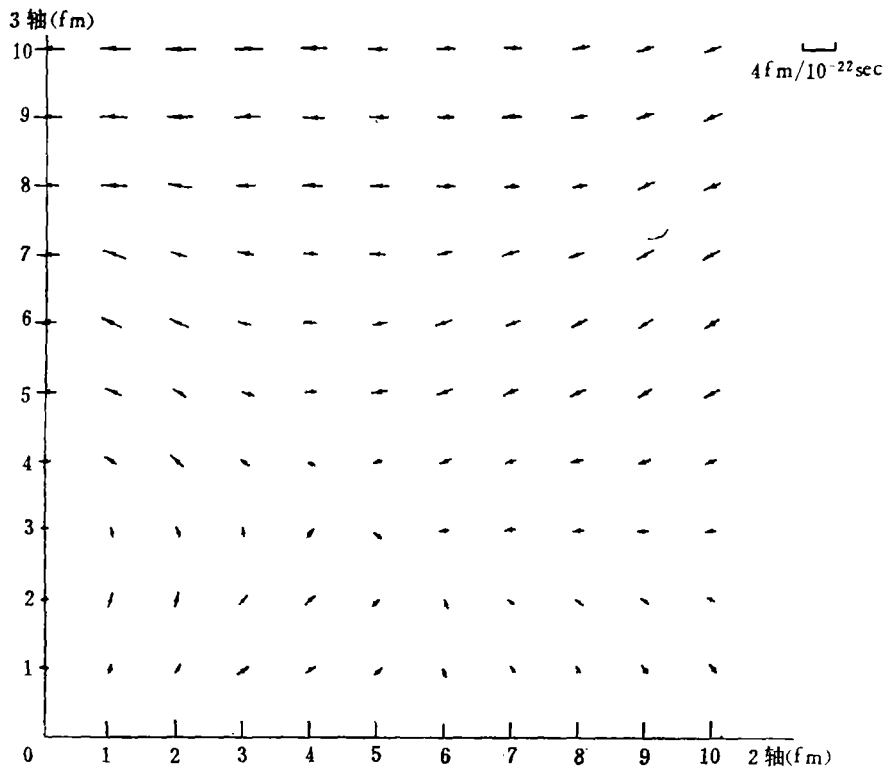


图 2(c) ^{168}Er 的速度分布。密度与位相一致自治条件。转动频率 $\hbar\omega_{cr}$ 为 1.5 MeV。
图中速度标度为 $4\text{fm}/10^{-22}$ 秒,其他条件同图 1(a)

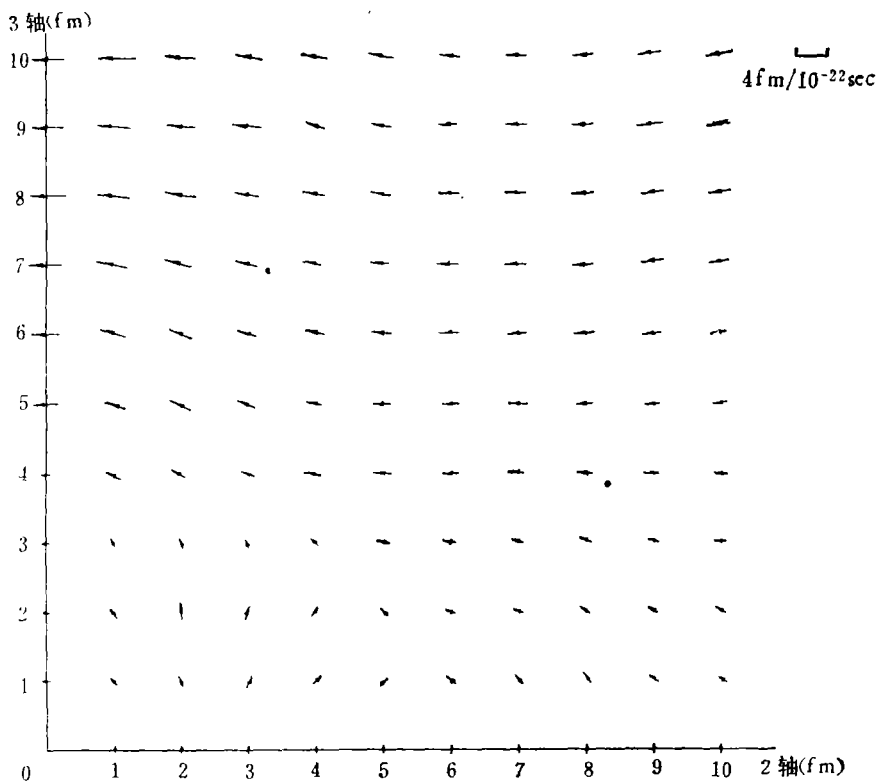


图 2(d) ^{168}Er 的速度分布。转动频率 $\hbar\omega_{cr}$ 为 2.25 MeV。其他条件同图 2(c)

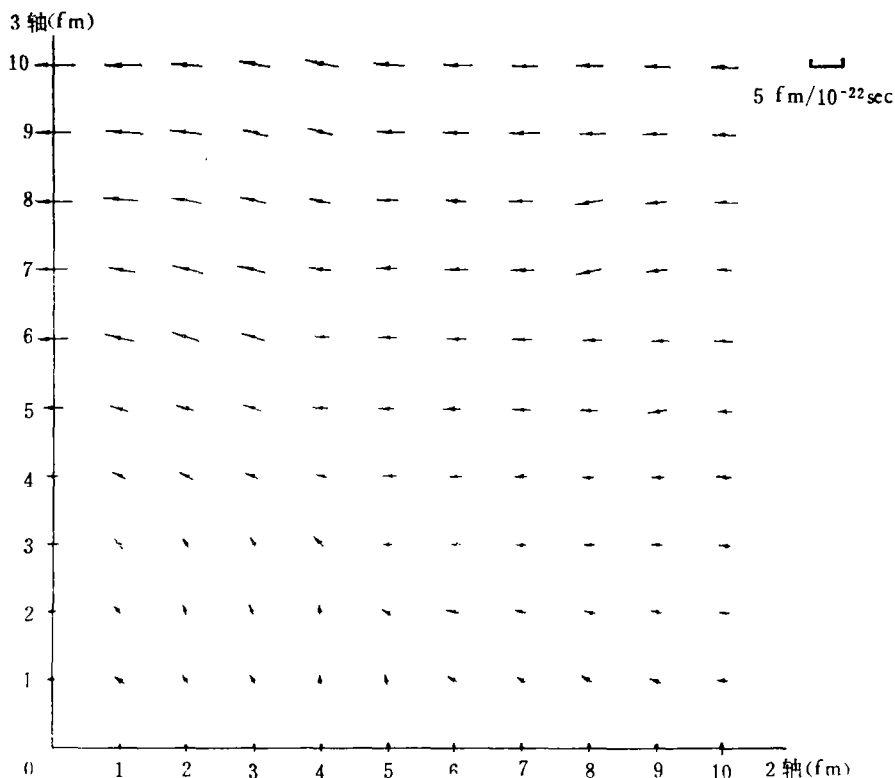


图 2(f) ^{160}Er 的速度分布。转动频率 $\hbar\omega_{cr}$ 为 2.5 MeV 其他条件同图 2(c)

速度分布, 但每点速度数值并不完全是刚体值。而对于不同的自洽条件达到这种刚体型的速度分布的转动频率是不同的。

当然, 在高速转动下, 自洽条件还是一个很值得研究的课题。

作者感谢张其欣同志在计算程序方面给予的很多帮助。

参 考 文 献

- [1] T. de Forest and J. D. Walecka, *Adv. Phys.*, **15**(1966), 1.
- [2] M. Radomski, *Phys. Rev.*, **C14**(1976), 1704.
- [3] P. Gulshani and D. J. Rowe, *Can. J. Phys.*, **56**(1978), 480.
- [4] A. Bohr and B. R. Mottelson, *Nuclear Structure*, Vol. 2 (Benjamin New York, 1975).
- [5] *Heavy-Ion, High-Spin States and Nuclear Structure* Vol. 1 (Vienna, 1975).
- [6] K. F. Liu and G. Ripka, *Nucl. Phys.*, **A293**(1977), 333.

VELOCITY CURRENT DISTRIBUTION FOR FAST ROTATION NUCLEI

WU XI-ZHEN ZHANG XI-ZHEN ZHUO YI-ZHONG FENG REN-FA

(Institute of Atomic Energy, Academia Sinica)

ABSTRACT

In this work the velocity current distribution is calculated on the basis of exact solution of the cranked anisotropic harmonic oscillator by including $\Delta N=2$ at the requirement of isotropic velocity distribution. We study the character of velocity current distribution for the nuclei with high speed rotation. We also discuss the effect of the self-consistency condition.