第4卷 第5期 高能物理与核物理 Vol. 4, No. 5
1980年9月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Sept., 1980

绕数变量与规范条件

刘耀阳 汪克林 鲍锡明
(中国科学技术大学)

摘 要

在不同的规范条件下从瞬子解出发计算真空的绕数变量发现，即使边界条件确定，绕数变量的值仍同趋于无穷的极限方式有关. 在 Landau 规范中具有确定物理意义的极限方式导致半整数的绕数变量值. temporal 规范比较特殊，其结果和极限所取的方式无关.

绕数变量的引入是从瞬子解的出现而来，因为从瞬子解的表示式

$$A_\mu = \frac{x^2}{x^2 + a^2} g^{-1}\partial\mu g, \tag{1}$$

看出在 $x^2 \to \infty$ 时 A_μ 是一纯规范项，代表真空. 由于瞬子解的示性数

$$Q = 1, \tag{2}$$

如果我们考虑四度欧空中以 x_4 为轴的一个“大圆柱”而圆柱的侧面的积分有

$$\varphi_L = \frac{1}{8\pi^2}\int dx_4 ds_i \epsilon_{ijk} Tr(A_j A_k A_4) = 0, \tag{3}$$

则上、下底的绕数之差

$$q_+ - q_- = 1, \tag{4}$$

其中

$$q_\pm = \lim_{x_4 \to \pm\infty} -\frac{1}{24\pi^2}\int d^3x \epsilon_{ijk} Tr(A_i A_j A_k). \tag{5}$$

$q_\pm$ 是否一定取整数值呢？最近 Sciuto 的报告中对这一问题作了有趣的讨论[1]. 他认为问题的关键在于边界条件如何选取，如果取强边界条件 (SBC)，则绕数变量只能取整数值，所谓 SBC 指要求真空的 A_μ

$$A_\mu = U^{-1}\partial_\mu U \tag{6}$$

中的 U 有下列边界行为

$$\lim_{r\to\infty} U(r, \theta, \varphi) = \text{const}, \tag{7}$$

则可以证明

$$\lim_{r\to\infty} r A_i(r) = 0. \tag{8}$$

由于(7)式，无穷远处紧致为一点所以 $x \to U(x)$ 是一个 $S^3 \to S^3$ 的映射，所以绕数必须是

本文1979年5月10收到.

整数. 但采用 SBC 却排除了 $A_i \sim 0\left(\frac{1}{r}\right)$ 这样的组态的可能性. 代替 (7) 式可以采用弱边界条件 (WBC), 即

$$\lim_{r\to\infty} U(r, \theta, \varphi) = U_0(\theta, \varphi), \tag{9}$$

即无穷远处不再紧致为一点, 于是 $x \to U(x)$ 不再是 $S^3 \to S^3$ 的映射, 绕数变量可以取非整数值. 这样的好处在于它可包括 $A_i \sim 0\left(\frac{1}{r}\right)$ 这样的组态.

在本文中从瞬子解出发在不同的规范中计算真空的绕数变量发现, 即使边界条件确定, q 的数值仍紧密依赖于取极限的方式. 对确定的规范来说,必须选取一定的极限方式才能使 (4) 式成立. 先讨论 Landau 规范, G'tHooft 把瞬子解写成下列的形式[2]

$$A^a_\mu = \frac{2}{g}\frac{\eta_{a\mu\nu}x^\nu}{x^2 + a^2}, \tag{10}$$

其中 g 是耦合常数 (以下为讨论方便起见均令 $g = 1$), a 是瞬子的大小参量, $\eta_{a\mu\nu}$ 是他引进的符号. 利用 $\eta_{a\mu\nu}$ 的下述性质

$$\eta_{a\mu\mu} = 0, \quad \eta_{a\nu\mu} = -\eta_{a\mu\nu}, \tag{11}$$

很易证明 (10) 式满足

$$\partial_\mu A^a_\mu = 0, \tag{12}$$

即瞬子解满足 Landau 规范条件. 在以下的计算中我们仍然用 (1) 式的表示, 其中的 $g(x)$ 是[3]

$$\left.\begin{aligned} g(x) &= (x_4 - i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma})/(x^2)^{\frac{1}{2}}, \\ g^+(x) &= g(x)^{-1} = (x_4 + i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma})/(x^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

为了便于讨论取各种的极限方式, 在计算 (3) 式的 φ_L 及 (5) 式的 q 时, 先把空间的积分在一个半径为 R 的大球上作. x_4 的上、下限取作 B 及 $-A$. 最后令 A, B, R 以不同的方式趋于无穷大. 将 (1), (13) 两式代入 (5) 式中经过一定的运算得

$$\begin{aligned} q_{(x_4=B)} = \frac{B}{\pi}\Bigg\{ & a^2\Bigg[\frac{R}{2(B^2+R^2+a^2)^2} - \frac{3R}{4(B^2+a^2)(B^2+R^2+a^2)} \\ & - \frac{1}{4(B^2+a^2)^{3/2}}\left(\tan^{-1}\frac{R}{\sqrt{B^2+a^2}} - \tan^{-1}0\right)\Bigg] \\ & + \frac{1}{(B^2+a^2)^{1/2}}\left(\tan^{-1}\frac{R}{\sqrt{B^2+a^2}} - \tan^{-1}0\right) - \frac{R}{(B^2+R^2+a^2)}\Bigg\}, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} q_{(x_4=-A)} = -\frac{A}{\pi}\Bigg\{ & a^2\Bigg[\frac{R}{2(A^2+R^2+a^2)^2} - \frac{3R}{4(A^2+a^2)(A^2+R^2+a^2)} \\ & - \frac{1}{4(A^2+a^2)^{3/2}}\left(\tan^{-1}\frac{R}{\sqrt{A^2+a^2}} - \tan^{-1}0\right)\Bigg] + \frac{1}{(A^2+a^2)^{1/2}} \\ & \cdot\left(\tan^{-1}\frac{R}{\sqrt{A^2+a^2}} - \tan^{-1}0\right) - \frac{R}{(A^2+R^2+a^2)}\Bigg\}. \end{aligned} \tag{15}$$

把 (1), (13) 式代入 (3) 式中求得

$$\varphi_L = \frac{R^3}{\pi}\left\{\frac{B}{(R^2+a^2)(B^2+R^2+a^2)} + \frac{A}{(R^2+a^2)(A^2+R^2+a^2)}\right.$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{(R^2+a^2)^{3/2}}\tan^{-1}\left(\frac{B}{\sqrt{R^2+a^2}}\right)-\frac{1}{(R^2+a^2)^{3/2}}\tan^{-1}\left(-\frac{A}{\sqrt{R^2+a^2}}\right)\\
&-a^2\left[\frac{B}{2(R^2+a^2)(B^2+R^2+a^2)^2}+\frac{A}{2(R^2+a^2)(A^2+R^2+a^2)^2}\right.\\
&+\frac{3B}{4(R^2+a^2)^2(B^2+R^2+a^2)}+\frac{3A}{4(R^2+a^2)^2(A^2+R^2+a^2)}\\
&\left.-\frac{3}{4(R^2+a^2)^{5/2}}\tan^{-1}\left(\frac{B}{\sqrt{R^2+a^2}}\right)-\frac{3}{4(R^2+a^2)^{5/2}}\tan^{-1}\left(-\frac{A}{\sqrt{R^2+a^2}}\right)\right]\Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

在取 A, B, R 趋于无穷的极限时令

$$\frac{B}{R}=\beta,\quad \frac{A}{R}=\alpha, \tag{17}$$

保持 α, β 一定，然后令 A, B, R 趋于无穷．当 α, β 取不同值时就对应着不同的极限方式．当 A, B, R 趋于无穷时 (14), (15), (16) 成为

$$q_+=\frac{1}{\pi}\left\{\tan^{-1}\frac{1}{\beta}-\tan^{-1}0-\frac{\beta}{1+\beta^2}\right\}, \tag{18}$$

$$q_-=-\frac{1}{\pi}\left\{\tan^{-1}\frac{1}{\alpha}-\tan^{-1}0-\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\right\}, \tag{19}$$

$$\varphi_L=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{\beta}{1+\beta^2}+\frac{\alpha}{1+\alpha^2}+\tan^{-1}\beta-\tan^{-1}(-\alpha)\right\}. \tag{20}$$

将 $\tan^{-1}$ 的值限制在 $-\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{\pi}{2}$ 之间讨论．利用

$$\tan^{-1}\alpha+\tan^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}, \tag{21}$$

可以验证的确有

$$q_+-q_-+\varphi_L=1. \tag{22}$$

同时可以看出要使 φ_L 为零只有一种唯一的极限形式

$$\alpha=\beta=0. \tag{23}$$

它相当于先令 $R\to\infty$，然后令 A, $B\to\infty$．这时 q_+ 为 $+\frac{1}{2}$，q_- 为 $-\frac{1}{2}$．绕数变量具有确定意义．且绕数变量之间相距为 1．因此看出在 Landau 规范中从瞬子解出发也和 Coulomb 规范一样得到半整数的绕数变量．由瞬子解的表示式看出，它在 $\boldsymbol{x}\to\infty$ 时确实和方向有关，符合 WBC．所以得到半整数值的结果是自然的．

现在来看 Sciuto[4] 在 Coulomb 规范中的讨论．

将 (13) 中的 $g(x)$ 记作

$$g(x)=\exp\left[i\beta(r,x_4)\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x}}{r}\right], \tag{24}$$

其中

$$\beta(r,x_4)=-\tan^{-1}\left(\frac{r}{x_4}\right). \tag{25}$$

为了把 (1) 式中的瞬子解变到 Coulomb 规范中去,引入一规范变换

$$B_\mu = h^{-1}A_\mu h + h^{-1}\partial_\mu h, \tag{26}$$

其中

$$h(x) = \exp\left[i\gamma(r, x_4)\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x}}{r}\right]. \tag{27}$$

要使之满足

$$\partial iBi = 0, \tag{28}$$

则 γ 应满足下列方程

$$\frac{\partial^2\gamma}{\partial\gamma^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\gamma}{\partial r} = \frac{x_4^2 - r^2 + a^2}{r^2(x^2+a^2)}\sin 2\gamma - \frac{2x_4}{r(x^2+a^2)}\cos 2\gamma + \frac{2x_4(x_4^2+a^2)}{r(x^2+a^2)^2}. \tag{29}$$

可以很易证明

$$B_\mu = U^{-1}\partial_\mu U\left[1 + 0\left(\frac{a^2}{x^2}\right)\right], \tag{30}$$

因此在 $x^2\to\infty$ 时 B_μ 取 $U^{-1}\partial_\mu U$ 的形式,其中

$$U = g(x)h(x) = \exp\left[i\alpha(r, x_4)\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x}}{r}\right], \tag{31}$$

$$\alpha(r, x_4) = \beta(r, x_4) + \gamma(r, x_4). \tag{32}$$

和 Landau 规范中一样,我们把 (30) 式代入 (5) 式中去计算,得

$$q = \frac{1}{\pi}\left[\alpha(R, x_4) - \alpha(0, x_4) - \frac{1}{2}\Big(\sin 2\alpha(R, x_4) - \sin 2\alpha(0, x_4)\Big)\right]. \tag{33}$$

当 x_4, R 趋于无穷时,我们得到真空的 q 值,由于 $\gamma(r, x_4)$ 的函数形式需解方程 (29) 才能确定,因此 $\alpha(r, x_4)$ 的函数形式也不确定. 尽管如此我们仍可从 (33) 的形式猜测 q 的数值在 x_4/R 的比值不同时的不同极限方式下可以取不同的连续变化的值的. 例如 Sciuto 在他的工作中[4]就指出在

$$\frac{x_4}{R} = 0,$$

的极限方式下 $q = \pm\frac{1}{2}$ 及 $\varphi_L = 0$. 可见 q 取非整数值.

最后我们讨论一下 temporal 规范的情形,对 (1) 式作下列规范变换

$$C_\mu = f^{-1}A_\mu f + f^{-1}\partial_\mu f, \tag{34}$$

其中

$$f = \exp\left[i\delta(r, x_4)\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x}}{r}\right],$$

$$\delta(r, x_4) = -\frac{r}{\sqrt{r^2+a^2}}\tan^{-1}\frac{x_4}{\sqrt{r^2+a^2}}. \tag{35}$$

可以很易证明变换后

$$c_4 = 0, \tag{36}$$

即把 (1) 式的瞬子解变到 temporal 规范中,根据相同的论证,$x^2\to\infty$ 时 c_i 可表示为

$$c_i \to U^{-1}\partial_i U. \tag{37}$$

其中

$$U = g(x)f(x) = \exp\left[i\rho(r, x_4)\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x}}{r}\right], \tag{38}$$

$$\rho(r, x_4) = \beta(r, x_4) + \delta(r, x_4). \tag{39}$$

把 (38) 代入 (5) 式中，得

$$q = \frac{1}{\pi}\left[\rho(R, x_4) - \rho(0, x_4) - \frac{1}{2}\sin 2\rho(R, x_4) + \frac{1}{2}\sin 2\rho(0, x_4)\right] \tag{40}$$

但是在 temporal 规范中如令

$$\frac{x_4}{R} = b, \tag{41}$$

则

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ x_4}} \rho(R, x_4) = \lim_{R, x_4\to\infty} -\left[\tan^{-1}b + \tan^{-1}\frac{1}{b}\right] = \frac{(2n_1 + 1)}{2}\pi \tag{42}$$

$$\lim_{x_4\to\infty} \rho(0, x_4) = -\lim_{R, x_4\to\infty} [\tan^{-1}\infty + \tan^{-1}0] = \frac{(2n_2 + 1)}{2}\pi \tag{43}$$

将 (42), (43) 代入 (40) 中，得

$$q = n. \tag{44}$$

于是得出结论，在 temporal 规范中 q 的数值和取极限的方式无关．由于 $c_4 = 0$, φ_L 不论取极限的方式如何总为零．

Wadia 和 Yonea[5] 曾用另一种方式来讨论这一问题．他们将侧面的积分加在上、下底的积分里来重新定义 $q_\pm$ 使之符合 (4) 式．在本文中指出不采用他们的办法，仍用原来的 $q_\pm$ 的定义，从瞬子解出发在 Landau 规范中和 Sciuto 在 Coulomb 规范中一样，只要选取确定的极限方式也一样得到具有确定意义的半整数值 q．此外具体地计算出 q 的数值一般与极限方式有关后使得从不同角度出发对这问题的讨论之间的关系可以更明瞭一些．并且，在 Landau 规范和 Coulomb 规范中，为使 $\varphi_L = 0$ 必先取 $R\to 0$，物理上是十分合理的．这再一次显示，瞬子解产生真空隧道效应的概念，绕数的概念符合物理上的要求．

一般情况如何，我们在进一步工作中讨论．

参　考　文　献

[1] S. Sciuto, *Phys. Rep.*, **49** (1979), 181.
[2] G. t'Hooft, *Phys. Rev.*, **D14** (1976), 3432.
[3] R. Jackiw and C. Rebbi, *Phys. Rev.*, **D14** (1976), 517.
[4] S. Sciuto, *Phys. Lett.*, **71B** (1977), 129.
[5] Wadia and Yoneya, *Phys. Lett.*, **66B** (1977), 341.

WINDING NUMBER AND GAUGE CONDITION

LIU YAO-YANG WANG KE-LIN BAO XI-MING
(*University of Science and Technology of China*)

ABSTRACT

The winding nember is calculated from the instanton solution under different gauge conditions. It is observed that, though the boundary condition is definite, the value of the winding number still depends on the way of approaching infinity. In Landau gauge, it leads to winding number of half integral value by the limiting way with clear Physical meaning. Particularly in temporal gauge and the result is irrelevant with the limiting way.