第4卷 第3期 高能物理与核物理 Vol. 4, No. 3
1980年5月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS May, 1980

规范场–鬼场固有顶角的 Ward-Takahashi 恒等式

邝宇平 易余萍
(兰州大学)

摘要

本文推导了规范场-鬼场固有顶角满足的 Ward-Takahashi 恒等式的便于应用的形式并举例讨论了它的应用.

在规范理论中，Ward-Takahashi 恒等式（以下简称 W-T 恒等式）不但是证明可重整性所不可缺少的，而且在许多具体计算中（例如 QCD 中的一些计算）也起着重要作用. 它可将高阶固有顶角化为低阶固有顶角使计算得到简化. 对非阿贝尔理论来说，在量子化时需要考虑如下的作用量

$$\int d^4x\{\mathscr{L}(x)+\mathscr{L}_{\text{F.P.}}(x)+\mathscr{L}_{\text{g.f.}}(x)\}. \tag{1}$$

其中 $\mathscr{L}(x)$ 是理论中规范不变的拉氏函数密度，$\mathscr{L}_{\text{g.f.}}(x)$ 是规范固定项，$\mathscr{L}_{\text{F.P.}}(x)$ 是规范补偿项，其中包含 Faddeev-Popov 鬼场. 在许多计算中往往需要知道包含鬼场在内的 W-T 恒等式. 这种恒等式是理论对包含鬼场在内的某种变换的不变性的反映. Becchi-Rouet-Stora[1] 曾提出一种变换使得（1）式不变. 在通常的文献中就是由这个不变性导出相应的 W-T 恒等式的[2]. 在 Becchi-Rouet-Stora 的变换中，$\mathscr{L}(x)$ 中所含各场的变换就是普通规范变换，但鬼场的变换较复杂，不是线性的（这里所说的变换都指无穷小变换）. 这样导出的 W-T 恒等式中，$\mathscr{L}(x)$ 中所含各场的各种固有顶角之间的关系具有类似于阿贝尔理论的通常形式，便于简化计算. 但与鬼场有关的各种固有顶角（例如规范场-鬼场-鬼场顶角）之间的关系则相当复杂，包含复合算符的矩阵元，不便于实际应用. 这往往造成一些工作中的计算不能进行到底[3].

Becchi-Rouet-Stora 变换中鬼场部分之所以复杂是因为它要使整个（1）式不变. 其实这是不必要的. 从熟知的阿贝尔理论来看，量子化时需要考虑的作用量是

$$\int d^4x\{\mathscr{L}(x)+\mathscr{L}_{\text{g.f.}}(x)\}, \tag{2}$$

而通常 W-T 恒等式是由 $\mathscr{L}(x)$ 的规范不变性导出的，规范变换并不保持整个（2）式不变. 因此我们可以改变对鬼场变换部分的考虑，寻找保持

$$\int d^4x\{\mathscr{L}(x)+\mathscr{L}_{\text{F.P.}}(x)\} \tag{3}$$

本文 1978 年 12 月 12 日收到.

不变的变换，由此不变性来推导相应的 W-T 恒等式. 由于在 $\mathscr{L}_{\text{F.P.}}(x)$ 中鬼场的出现形式与其它场很类似，所以可以想像，这样的变换中鬼场部分可能也是线性的，由此得到的 W-T 恒等式可能全部都具有通常的便于简化计算的形式. 下面我们将看到情况确是如此. 我们将具体找出保持(3)式不变的变换，并由它导出相应的 W-T 恒等式，尤其是规范场-鬼场-鬼场固有顶角满足的关系. 最后我们以一个 QCD 的计算为例说明此关系的应用.

为简单起见，不失普遍性，我们只考虑一个纯规范场系统(加入其它场不影响本文主要结果). 设规范群 G 为一 r 阶单纯李群，耦合常数为 g，规范场为 $A^i_\mu(x)(i=1,2,\cdots,r)$，群的结构常数为 C_{ijk}，系统的规范不变拉氏函数密度为 $\mathscr{L}(x)$. 我们取协变规范条件

$$\mathscr{L}_{\text{g.f}} = -\frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^i_\mu)^2, \tag{4}$$

其中 α 为规范参量. 规范补偿项为

$$\mathscr{L}_{\text{F.P.}} = \bar{\phi}_i[\delta_{ij}\Box + gC_{ijk}(\partial_\mu A^k_\mu + A^k_\mu\partial_\mu)]\phi_j \tag{5}$$

其中 ϕ_i, $\bar{\phi}_i$ 是 Faddeev-Popov 鬼场.

我们找到的保持(3)式不变的变换是

$$A^i_\mu(x) \to A'^i_\mu(x) = A^i_\mu(x) + C_{ijk}A^k_\mu(x)\varepsilon_j(x) + \frac{1}{g}\frac{\partial\varepsilon_i(x)}{\partial x_\mu}, \tag{6a}$$

$$\phi_i(x) \to \phi'_i(x) = \phi_i(x) + C_{ijk}\phi_k(x)\varepsilon_j(x), \tag{6b}$$

$$\bar{\phi}_i(x) \to \bar{\phi}'_i(x) = \bar{\phi}_i(x) + C_{ijk}\bar{\phi}_k(x)\varepsilon_j(x) + iC_{ijk}\int d^4y\,\frac{\partial\Delta_0(x,y)}{\partial x_\mu}\bar{\phi}_k(y)\frac{\partial\varepsilon_j(y)}{\partial y_\mu}. \tag{6c}$$

式中 $\varepsilon_j(x)$ 是一无穷小参量，$\Delta_0(x,y)$ 是鬼场的自由传播子，满足

$$\Box\Delta_0(x,y) = i\delta^4(x-y). \tag{7}$$

(6a) 式就是普通规范变换，因此保持 $\mathscr{L}(x)$ 不变. 直接代入不难证明 (6a)—(6c) 一起保持 $\int d^4x\mathscr{L}_{\text{F.P.}}(x)$ 不变. 我们看到在(6)式中各场都是以线性形式出现的.

下面从(6)的不变性推导相应的 W-T 恒等式. 考虑路径积分

$$W(J,K,\bar{K}) \equiv e^{iZ(J,K,\bar{K})} = \int[dA][d\phi][d\bar{\phi}]\,e^{i\int d^4x[\mathscr{L}+\mathscr{L}_{\text{F.P.}}+\mathscr{L}_{\text{g.f.}}+J^i_\mu A^i_\mu+\bar{K}_i\phi_i+\bar{\phi}_iK_i]}, \tag{8}$$

其中 $J^i_\mu(x)$, $K_i(x)$, $\bar{K}_i(x)$ 为外源. 将(8)中的积分变量做(6)的变换. 考虑到(6)保持(3)式不变，并注意在(6)的变换下

$$[dA'][d\phi'][d\bar{\phi}'] = [dA][d\phi][d\bar{\phi}],$$

我们得到

$$\begin{aligned}\Big\{\frac{i}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\delta}{i\delta J^i_\mu(x)}\right) + \int d^4y\,\Big[\frac{\partial J^i_\mu(y)}{\partial y_\mu} - gC_{ijk}J^i_\mu(y)\left(\frac{\delta}{i\delta J^k_\mu(y)}\right)\\ - gC_{ijk}\bar{K}_i(y)\left(\frac{\delta}{i\delta\bar{K}_k(y)}\right) - gC_{ijk}K_i(y)\left(\frac{\delta}{i\delta K_k(y)}\right)\\ + igC_{ijk}\frac{\partial}{\partial y_\mu}\left(\left(\int d^4z\,\frac{\partial\Delta_0(z,y)}{\partial z_\mu}K_i(z)\left(\frac{\delta}{i\delta K_k(y)}\right)\right)\right)\Big]\end{aligned}$$

$$\cdot\, \Delta_{jl}\left(y, x; \frac{\delta}{i\delta J(y)}\right)\Bigg\} W = 0, \tag{9}$$

其中 $\Delta_{jl}\left(y, x; \frac{\delta}{i\delta J(y)}\right)$是鬼场的物理传播子. (9)式就是与(6)的不变性相应的 Slavnov-Taylor 恒等式的生成方程.

再按通常习惯定义场的经典值

$$\frac{\delta Z}{\delta J^i_\mu(x)} \equiv a^i_\mu(x), \quad \frac{\delta Z}{\delta \bar{K}_i(x)} \equiv \varphi_i(x), \quad \frac{\delta Z}{\delta K_i(x)} \equiv -\bar{\varphi}_i(x), \tag{10a}$$

及有效作用

$$\Gamma \equiv Z - \int d^4x(J^i_\mu a^i_\mu + \bar{K}_i\varphi_i + \bar{\varphi}_i K_i), \tag{10b}$$

它满足

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta a^i_\mu(x)} = -J^i_\mu(x), \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi_i(x)} = \bar{K}_i(x), \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\varphi}_i(x)} = -K_i(x). \tag{11}$$

利用(10)、(11)并经过与通常文献中一样的泛函运算[2]，可将(9)化成

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\delta \Gamma_0}{\delta a^i_\mu(x)} + gC_{ijk}\frac{\delta \Gamma_0}{\delta a^j_\mu(x)}a^k_\mu(x) - gC_{ijk}\frac{\delta \Gamma_0}{\delta \varphi_j(x)}\varphi_k(x) \\
&- gC_{ijk}\frac{\delta \Gamma_0}{\delta \bar{\varphi}_j(x)}\bar{\varphi}_k(x) + igC_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\int d^4y\,\frac{\partial \Delta_0(y,x)}{\partial y_\mu}\frac{\delta \Gamma_0}{\delta \bar{\varphi}_j(y)}\bar{\varphi}_k(x)\right) \\
&+ \int d^4y d^4z\left[igC_{ljk}\frac{\delta \Gamma_0}{\delta a^j_\mu(y)}\Delta_{ln}\left(y, z; a(y) - i\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)\frac{\delta}{\delta J^k_\mu(y)}\right. \\
&- igC_{ljk}\frac{\delta \Gamma_0}{\delta \varphi_j(y)}\Delta_{ln}\left(y, z; a(y) - i\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)\frac{\delta}{\delta \bar{K}_k(y)} \\
&\left.+ igC_{ljk}\frac{\delta \Gamma_0}{\delta \bar{\varphi}_j(y)}\Delta_{ln}\left(y, z; a(y) - i\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)\frac{\delta}{\delta K_k(y)}\right]\Delta^{-1}_{ni}\left(z, x; a(z) - i\frac{\delta}{\delta J(z)}\right) \\
&+ \int d^4y d^4z d^4u d^4v\, gC_{ljk}\delta^4(v-y)\frac{\partial}{\partial y_\mu}\left[\frac{\partial \Delta_0(u,y)}{\partial u_\mu}\frac{\delta \Gamma_0}{\delta \bar{\varphi}_j(u)}\Delta_{ln}\left(v, z; a(v) - i\frac{\delta}{\delta J(v)}\right)\right. \\
&\left.\cdot\frac{\delta}{\delta K_k(y)}\Delta^{-1}_{ni}\left(z, x; a(z) - i\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)\right] = 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

其中 Δ^{-1}_{ij} 是 Δ_{ij} 之逆，

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma + \frac{1}{2\alpha}\int(\partial_\mu a^i_\mu)^2 d^4x. \tag{13}$$

(12)式就是相应于(6)的不变性的 W-T 恒等式的生成方程.

将(12)对 a^i_μ 取各阶泛函微商并取外源为零，可以得到与一般文献[2]中相同的通常的 W-T 恒等式，这里不再写出. 现在我们要讨论的是与鬼场有关的固有顶角满足的 W-T 恒等式. 以规范场-鬼场-鬼场顶角 $\tilde{\Gamma}^{ijl}_\mu(k, -p-k, p)$ 为例(见图 1，这里规定外动量以向内为正). 将 $\frac{\delta}{\delta\varphi_l(x'')}\frac{\delta}{\delta\bar{\varphi}_j(x')}$ 运算到(12)上取外源为零，并换到动量表象，可得

$$\begin{aligned}
k_\mu[1 + B_i(k^2)]\tilde{\Gamma}^{ijl}_\mu(k, -p-k, p) &= ig[C_{ijn} + R^G_{ijn}(k, -p-k, p)] \\
&\cdot\left(1 + \frac{k\cdot p}{p^2}\right)\Delta^{-1}_{nl}(p) - ig\Delta^{-1}_{jn}(p+k)[C_{inl} + R^G_{inl}(k, -p-k, p)]
\end{aligned} \tag{14}$$

其中 $R^G_{ijl}(k, -p-k, p)$ 的定义如图 2 所示，$k^2B_i(k^2)$ 为第 i 个鬼场的自能，即

$$\Delta^{-1}_{ij}(k) = ik^2[1 + B_i(k^2)]\delta_{ij}. \tag{15}$$

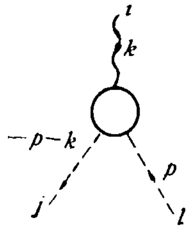

图 1　波浪线为规范场，虚线为鬼场

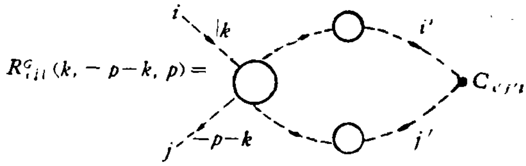

图　2

将(12)对 φ_i, $\bar{\varphi}_j$ 取高次泛函微商还可以得到类似于(14)的其它 W-T 恒等式. 这些 W-T 恒等式就是本文的主要新结果. 我们看到(14)的形式与通常的 W-T 恒等式很相象(不完全相同). 它可将 $k_\mu\tilde{\Gamma}_\mu$ 用 Δ^{-1} 来表示，这样就可使一些计算得到简化. 下面我们举一个 QCD 计算的简单例子来说明(14)的应用.

Pagels 曾对 QCD 做了一个非微扰的讨论[3]. 他在 $\alpha = 0$ 的 Landau 规范下对色规范场的传播子做了如下的禁闭假设

$$D_{\mu\nu}(q) \underset{q^2\to 0}{\sim} -i\,\frac{\delta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu/q^2}{q^2}\left(\frac{\mu^2}{q^2}\right)^{1-\varepsilon}, \tag{16}$$

其中 μ 是一个标志禁闭线度的质量量纲参量，$\varepsilon \to 0_+$ 是个红外正常化参量. 他希望在(16)的假设下能得到颜色禁闭的解并且一切物理观测量的解在取 $\varepsilon \to 0_+$ 后都是有限的. 但由于缺乏关于 $\tilde{\Gamma}^{ijl}_\mu$ 的 W-T 恒等式的知识，他的计算未能进行到底[1)]. 他不得不再对 $\tilde{\Gamma}^{ijl}_\mu$ 做进一步的假定. 在无自发破缺时 $\tilde{\Gamma}^{ijl}_\mu(0, -p, p)$ 可写成

$$\tilde{\Gamma}^{ijl}_\mu(0, -p, p) = C_{ijl}p_\mu A(p^2). \tag{17}$$

Pagels 进一步假定

$$A(p^2) = \varepsilon p^2 R(p^2), |R(0)| \underset{\varepsilon\to 0_+}{<} \infty, \tag{18}$$

在无自发破缺时各鬼场的 $B_i(p^2)$ 都相同，我们用 $B(p^2)$ 表之. 在 Pagels 的结果中还含有参量 $b \equiv B(0)$，其值也是无法求出的. 他只能考虑一些可能情况来讨论.

现在我们有了(14)，这些都可以计算出来. Pagels 由鬼场自能的 Dyson 方程和 (16) 的假设求得

$$B(p^2) = \frac{m^2(C_2/C_F)A(p^2)}{\varepsilon p^2[1 + B(p^2)]}. \tag{19}$$

其中 $C_F = 4/3$, $C_2 = \sum\limits_{jl} C_{ijl}C_{ijl}$, $m^2 = \mu^2/4(2\pi)^2$. 由此看出(18)意味着

$$|B(0)[1 + B(0)]| \underset{\varepsilon\to 0_+}{<} \infty. \tag{20}$$

现在我们从 (14) 又可得到一个 $A(p^2)$ 和 $B(p^2)$ 的关系. 因此与 (19) 联立就可完全将 $B(p^2)$ 算出来. 由图 2 不难证明

$$R^G_{ijl}(0; -p, p) = 0. \tag{21}$$

1) 虽然 Pagels[3] 还曾用轴规范进行了计算，避免了鬼场的麻烦，但在轴规范下的禁闭假设与固定矢量 n_μ 有关，已与 (16) 不相同了.

这样，将(14)对 k_μ 求微商，再取 $k=0$，并代入(17)，得到

$$[1+B(0)]A(p^2)=g\left[1+B(p^2)+2p^2\frac{dB}{dp^2}\right]. \tag{22}$$

令 $x\equiv p^2/m^2$，$f(x)\equiv 1+B(x)$，$a\equiv\frac{1}{2}(C_F/C_2)\varepsilon g f(0)$，则由(19)和(22)得

$$\frac{df}{dx}+\left(a+\frac{1}{2x}\right)f-af^2=0. \tag{23}$$

不难求出(23)的解为

$$f(x)=\frac{e^{-ax}}{\sqrt{x}}\left[\frac{1}{C}-\sqrt{\pi a}\,\mathrm{erf}\,(\sqrt{ax})\right]^{-1}, \tag{24}$$

其中 $\mathrm{erf}\,(x)\equiv\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \bar{e}^{-t^2}dt$. 用 $f(0)=2(C_2/C_F)a/(\varepsilon g)$ 的条件可定出 $C=0$，即 $f(x)=0$. 于是算出在(16)的假设下

$$B(p^2)=-1. \tag{25}$$

由此看出(20)显然满足，且 $b\equiv B(0)=-1$. 这正是 Pagels 所讨论的第一种情况.

(14)式在非阿贝尔规范理论的许多计算中(例如讨论动力学自发破缺)都是有用的.

参 考 文 献

[1] C. Becchi et al., *Phys. Lett.*, **52B**(1974), 344.
[2] G. Costa and M. Tonin, *Rivista Nuo. Cim.*, **5**(1975), 29, S. D. Joglekar and B. W. Lee., *Ann. Phys.*, (N. Y.) **97**(1976), 160.
[3] H. Pagels, *Phys. Rev.*, **D15**(1977), 2991.

WARD-TAKAHASHI IDENTITIES FOR GAUGE-GHOST FIELD PROPER VERTICES

KUANG YU-PING YI YU-PING
(*Lanchow University*)

ABSTRACT

A convenient form of the Ward-Takahashi identities for gauge-ghost field proper vertices is derived and an example of its application is discussed.