

# $A(a, ax)B$ 型三体反应中的 链式结构态共振<sup>1)</sup>

韩文述 庄斐

(中国科学院原子能研究所)

## 摘 要

本文用乘子方法导出数值计算使用的,带有紧致核的三体  $T$  矩阵;并分别给出,当初态和末态取平面波或扭曲波形式时,  $A(a, ax)B$  型三体反应跃迁振幅的计算公式.  $T$  矩阵中,除相应于准自由散射和末态相互作用项外,还包括三体形成链式结构态的共振项. 在将链式结构态展成两个二体束缚态的近似下,给出共振能量计算公式;并以靶核取  ${}^8\text{Be}$  和  ${}^6\text{Li}$  为例,将计算值与实验值和类分子模型理论值相比较,符合较好. 最后还讨论了检验此种共振的实验设想.

## 一、引 言

利用 Lippmann-Schwinger (以下简称 L-S) 方程解决三体反应问题的基本困难是此方程的三体积分核是非紧致的,或用图形语言来说,它包括不连接图<sup>[1]</sup>,因此使得道波函数的 L-S 方程没有唯一解<sup>[2]</sup>,和 L-S 算符方程 Born 级数解不收敛<sup>[3]</sup>. P. A. Kazaks 等<sup>[4]</sup>用乘子方法<sup>[5]</sup>推导三体散射公式,得到一个具有紧致核的非耦合方程;并证明了它与 Faddeev 方程以及后来推广了的一些三体方程等价. 近来, D. Eppel 等<sup>[6]</sup>又用乘子方法研究了连续态上有两个核子的反应壳模型公式.

研究  $A(a, ax)B$  型核反应,是研究原子核中集团结构的有力工具. 在入射粒子能量较高情况下,准自由散射是相当好的近似<sup>[7]</sup>. 用 Migdal-Watson 模型<sup>[8]</sup>研究形如



的中间过程,即所谓末态相互作用,亦得到较好结果. 当入射能量不太高时,进一步研究三体  $T$  矩阵的完整形式,以便考虑更多效应是十分必要的.

本文首先在第二节中,用乘子方法消除积分核中非紧致项,导出完整形式  $T$  矩阵;并给出初态和末态取平面波或扭曲波形式下跃迁振幅计算公式. 在第三节中,将所得公式用于研究核中集团效应和三体链式结构态. 最后对检验此种共振的实验设想等问题进行了讨论.

本文 1978 年 8 月 30 日收到.

1) 本文曾在中国物理学会年会(1978 年 8 月)核物理分组会上报告过.

## 二、具有紧致核的三体 $T$ 矩阵

为了简单起见,假设所研究的体系,由三个不带内部结构的,可区分的(即忽略全同粒子效应)粒子(其质量为  $A_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ ) 组成,其哈密顿算符为:

$$H = H_0 + V, \quad (1)$$

$$H_0 = \sum_{i=1}^3 \mathcal{F}_i, \quad (2.1)$$

$$V = \sum_{i=1}^3 V_i, \quad (2.2)$$

式中:  $\mathcal{F}_i$  是第  $i$  个粒子的动能算符;  $V_i$  是不带  $i$  指标的两粒子间的相互作用位. 定义 Green 函数如下:

$$G(z) = (z - H)^{-1}, \quad (3)$$

$$G_0(z) = (z - H_0)^{-1}, \quad (4)$$

$$G_i(z) = (z - H_i)^{-1}, \quad (5)$$

$$G_{ij}(z) = (z - H_{ij})^{-1}, \quad (6)$$

其中:

$$H_i = H_0 + V_i, \quad (7.1)$$

$$H_{ij} = H_0 + U_{ij}, \quad (7.2)$$

$$U_{ij} = V_i + V_j, \quad (7.3)$$

式中  $z$  是能量,与定态能量  $E$  的区别是在于散射中间过程取复数.

如惯例,所定义的 Green 函数满足如下 L-S 方程:

$$G(z) = G_0(z) + G_0(z)V G(z), \quad (8.1)$$

$$G_i(z) = G_0(z) + G_0(z)V_i G_i(z), \quad (8.2)$$

$$G(z) = G_i(z) + G_i(z)U_{ik} G(z), \quad (8.3)$$

$$G(z) = G_{ij}(z) + G_{ij}(z)V_k G(z), \quad (8.4)$$

$$G_{ij}(z) = G_0(z) + G_0(z)U_{ij} G_{ij}(z). \quad (8.5)$$

$$i \neq j \neq k,$$

取  $T$  矩阵 L-S 形式为:

$$T = V + V G_0(z) T. \quad (9)$$

L. R. Dodd 等<sup>[1]</sup>已指出: 此方程的积分核  $V G_0$  是非紧致的,它包括有非连接图形. 为了消除非紧致项,定义二体位算符:

$$t_i = V_i + t_i G_0(z) V_i. \quad (10)$$

由此可推出:

$$t_i = V_i (1 - G_0(z) V_i)^{-1},$$

及

$$V_i G_i(z) = t_i G_0(z). \quad (10.1)$$

因此相当于引进乘子<sup>[4]</sup>:

$$L = (1 - G_0(z)V_i)^{-1}.$$

并定义包括两个二体位的算符:

$$\tau_{ij} = V_k + \tau_{ij}G_{ij}(z)V_k, \quad i \neq j \neq k. \quad (11)$$

从而有

$$\tau_{ij} = V_k(1 - G_{ij}(z)V_k)^{-1},$$

及

$$V_k G(z) = \tau_{ij} G_{ij}(z). \quad (11.1)$$

这相于引进乘子

$$L' = (1 - G_{ij}(z)V_k)^{-1}.$$

用(8)和(10)式,将(9)式化成:

$$T = \sum_{i=1}^3 t_i + \sum_{(i,j,k)} V_k G(z) U_{ij} (1 + G_0(z)t_k), \quad (9.1)$$

式中  $(i, j, k)$  表示对 1, 2, 3 的循环排列求和。再用(11.1)式,并注意到:

$$\tau_{ij} G_{ij}(z) = t_k (E - H_{ij} - U_{ij} G_0(z)t_k)^{-1}, \quad (11.2)$$

可得:

$$T = \sum_{i=1}^3 t_i + \sum_{(i,j,k)} t_k (E - H_{ij} - U_{ij} G_0(z)t_k)^{-1} U_{ij} (1 + G_0(z)t_k). \quad (9.2)$$

(9.2) 式是带有紧致核的  $T$  矩阵的完整形式之一,除第一项即通常的准自由散射项外,还包括共振项,它是由  $H_{ij}$  的本征态即链式结构态所引起的。

为了描述当链式结构态散裂时,还有末态相互作用存在,可再引入算符  $\xi_{ik}$ , 它定义为:

$$\xi_{ik} = V_k + \xi_{ik} G_i(z) V_k, \quad i \neq k. \quad (11.3)$$

从而有:

$$\xi_{ik} = V_k (1 - G_i(z) V_k)^{-1}, \quad (11.4)$$

及

$$V_k G_{ik}(z) = \xi_{ik} G_i(z), \quad (11.5)$$

$$\xi_{ik} G_i(z) = t_k (E - H_i - V_i G_0(z)t_k)^{-1}. \quad (11.6)$$

这相当又引入一个乘子:

$$L'' = (1 - G_i(z) V_k)^{-1}.$$

用(11.1)及(11.5)式有:

$$\begin{aligned} V_k G(z) &= \frac{1}{2} [V_k G_{ik}(z)(1 + V_j G(z)) + V_k G_{jk}(z)(1 + V_i G(z))] \\ &= \frac{1}{2} [\xi_{ik} G_i(z) + \xi_{jk} G_j(z) + \xi_{ik} G_i(z) \tau_{ji} G_{ki}(z) \\ &\quad + \xi_{jk} G_j(z) \tau_{ik} G_{jk}(z)]. \end{aligned}$$

将上式代入(9.1)式,并用(11.2)和(11.6)式得:

$$\begin{aligned}
 T = & \sum_{i=1}^3 t_i + \frac{1}{2} \sum_{(i,j,k)} t_k [(E - H_i - V_i G_0(\mathbf{z}) t_k)^{-1} + (E - H_j - V_j G_0(\mathbf{z}) t_k)^{-1}] \\
 & \cdot U_{ij} (1 + G_0(\mathbf{z}) t_k) \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{(i,j,k)} t_k [(E - H_i - V_i G_0(\mathbf{z}) t_k)^{-1} t_j (E - H_{ki} - U_{ki} G_0(\mathbf{z}) t_j)^{-1} \\
 & + (E - H_j - V_j G_0(\mathbf{z}) t_k)^{-1} t_i (E - H_{jk} - U_{jk} G_0(\mathbf{z}) t_i)^{-1}] \\
 & \cdot U_{ij} (1 + G_0(\mathbf{z}) t_k). \tag{9.3}
 \end{aligned}$$

上式中第二项是末态相互作用项，第三项是通过链式结构态共振后又经过末态相互作用的项。本文主要是讨论链式结构态共振，为了简化，下面仅给出直接由链式结构态断裂的跃迁振幅。

为了具体起见，假设初态为粒子1入射轰击在粒子2和3组成的靶核上(即入射平面波(对带电粒子应取库伦波)+靶核波函数)，末态为1, 2和3粒子自由态(取平面波或库伦波)。在初态和末态取平面波形式下，其跃迁振幅为：

$$\begin{aligned}
 T_{fi}^p = & \langle \mathbf{f} | \sum_{i=2}^3 t_i | \mathbf{i} \rangle + \langle \mathbf{f} | \{ t_1 (E - H_{23} - U_{23} G_0(\mathbf{z}) t_1)^{-1} U_{23} \\
 & + t_2 (E - H_{31} - U_{31} G_0(\mathbf{z}) t_2)^{-1} (V_3 + U_{31} G_0(\mathbf{z}) t_2) \\
 & + t_3 (E - H_{12} - U_{12} G_0(\mathbf{z}) t_3)^{-1} (V_2 + U_{12} G_0(\mathbf{z}) t_3) \} | \mathbf{i} \rangle. \tag{12}
 \end{aligned}$$

也可将(12)式中一部分算符抽出，改成初态、末态取扭曲波形式。为此假设初、末态扭曲波算符为：

$$W_i^+ = 1 + G_{1d}(\mathbf{z}) V_d, \tag{13.1}$$

$$W_f^- = 1 + U_{12} G_{12}, \tag{13.2}$$

其中：

$$G_{1d}(\mathbf{z}) = (\mathbf{z} - H_0 - V_1 - V_d)^{-1}, \tag{13.3}$$

$V_d$  是人射时，附加扭曲位。于是初、末态扭曲波函数满足：

$$| \mathbf{i}_d \rangle = W_i^+ | \mathbf{i} \rangle, \tag{13.4}$$

$$\langle \mathbf{f}_d | = \langle \mathbf{f} | W_f^-. \tag{13.5}$$

用(13.1—13.5)式，将(12)化成

$$\begin{aligned}
 T_{fi}^p = & \langle \mathbf{f}_d | t_3 | \mathbf{i}_d \rangle \\
 & + \langle \mathbf{f}_d | t_3 (E - H_{12} - U_{12} G_0(\mathbf{z}) t_3)^{-1} (U_{12} G_0(\mathbf{z}) t_3 + V_2 - V_d) | \mathbf{i}_d \rangle. \tag{14}
 \end{aligned}$$

当入射附加的扭曲位取为  $V_2$  时，即得类似于 P. A. Kazaks 等<sup>[9]</sup>的结果。跃迁振幅  $T_{fi}^p$  表式(12)中第一项，即准自由散射项，通常是用平面波冲量近似(PWIA)来计算。而  $T_{fi}^p$  (即(14)式)中的第一项，是用扭曲波冲量近似(DWIA)计算之。将(12)和(14)式作比较，虽然(14)式中项数有所减少，但就计算而言(12)式是方便的，因为扭曲波计算量是相当大的。

### 三、链式结构态

原子核中是否存在集团链式结构态是人们所关心的问题。H. Horiuchi 等<sup>[11]</sup>曾对一

些核低激发态有链式结构问题做了结构计算,但对较高激发态是否有链式结构尚未见讨论,这不单是由于结构计算不唯一,且像低激发态那样判断此种结构的其他物理量(如电磁跃迁)在较高激发态上的实验数据是不充分的.本文用上节结果来研究  $A(a, ax)B$  型三体反应中链式结构态共振,试图通过此种共振反应来寻找集团链式结构态.

由跃迁振幅( $T_{ii}^P$  或  $T_{ii}^D$ )的共振项中看出,除  $U_{ij}G_0(z)t_k$  项所提供的能量漂移外,可能有共振产生于  $H_{ij}$  本征态(即链式结构态)附近.链式结构态波函数  $\phi_{\alpha\beta}$  满足如下方程:

$$H_{\alpha\beta}\phi_{\alpha\beta} = E\phi_{\alpha\beta}, \quad \alpha \neq \beta = 1, 2, 3. \quad (15)$$

严格求解(15)式是困难的,为了近似给出产生链式结构态共振的能量位置,我们取如下简化模型.

将  $H_{\alpha\beta}$  化成粒子间相对坐标,并略去动量算符耦合项<sup>[10]</sup>,我们得到:

$$H_{\alpha\beta} = \mathcal{F}_\alpha(\mathbf{r}_{\gamma\beta}) + \mathcal{F}_\beta(\mathbf{r}_{\gamma\alpha}) + V_\alpha(\mathbf{r}_{\gamma\beta}) + V_\beta(\mathbf{r}_{\gamma\alpha}). \quad (16)$$

若  $A_\gamma$  较  $A_\alpha, A_\beta$  大得越多,则略去耦合项的近似越好.定义两体(集团)束缚态  $\phi_n^a$ , 它满足:

$$H_\alpha\phi_n^a = E_n^a\phi_n^a, \quad (17.1)$$

$$H_\alpha = \mathcal{F}_\alpha + V_\alpha, \quad (17.2)$$

式中  $n$  是本征态标号(包括所有必要的量子数),则链式结构态波函数  $\phi_{\alpha\beta}$  可展成:

$$\phi_{\alpha\beta} = \sum C_{nm}^{a\beta}\phi_n^a\phi_m^\beta \approx \phi_n^a\phi_m^\beta, \quad (18)$$

上式中近似等号是假设了展成其他态的成份很小.显然  $\phi_{\alpha\beta}$  的  $J^\pi$ (角动量和宇称)和  $T$ (总同位旋)值,可用  $\phi_n^a, \phi_m^\beta$  相应值耦合得到.设  $E_{in}$  为粒子 1 的入射能(均取质心系),则有

$$E_{in} = E_n^1 + E_m^2 - E_0^3, \quad (19)$$

式中  $E_0^3$  是靶核的基态本征值,  $E_n^1$  和  $E_m^2$  是两体系的集团激发态本征值,它们均取为实验值,但应属于实验或理论上已确认的集团结构态.原则上,当  $E_n^1 + E_m^2 - E_0^3 > 0$ , 或者说当入射粒子 1 能量  $E_{in}$  满足(19)式时,就可能有链式结构态存在(但对三体散裂反应,  $E_{in}$  应大于反应阈能),亦即在三体反应中有此种态的共振出现.

H. Horiuchi 等<sup>[11]</sup>用类分子模型讨论了链式结构,但具体计算做得较少.为了与他们的  $^{12}\text{C}^*$  的计算相比较,我们设想  $^8\text{Be} (^4\text{He}, ^4\text{He} \ ^4\text{He})$  反应,用(19)式计算了  $^{12}\text{C}^*$  链式结构态的能量,以及  $J^\pi$  和  $T$  值.将所得结果与 H. Horiuchi 等计算值及实验值一并列入表 1 中.虽然在此情况下,(16)式近似不够好,但由于  $E_n^1$  和  $E_m^2$  是取了实验值,仍得到了符

表 1  $^{12}\text{C}^*$  的链式结构态

$^4\text{He}$ 入射能 $E_{in}(c, m)$ MeV	$^{12}\text{C}^*$ 链式结构态			实验能级 <sup>[12]</sup>			类分子模型	
	$E_{\text{MeV}}^*$	$J^\pi$	$T$	$E_{\text{MeV}}^*$	$J^\pi$	$T$	$E_{\text{MeV}}^*$	$J^\pi$
0.092	7.459	0+	0	7.655	0+	0	8.22(直链式) 7.05(三角式)	0+
3.032	10.399	2+	0	10.3	(0+)	0	10.9	2+
5.972	13.339	0+ - 4+	0	12.71	1+	0		

合实验较好的结果。这说明我们的模型是有一定合理性的。

许多人对 ${}^6\text{Li}$ 的 $d + {}^4\text{He}$ 集团结构感兴趣, D. R. Thompson<sup>[13]</sup>认为第一个 $2^+$ 态(实验值为4.31MeV)是 $d + {}^4\text{He}$ 集团激发态。用此数据,在表2中给出以 $p, d$ 和 ${}^4\text{He}$ 粒子轰击 ${}^6\text{Li}$ 靶核时,可能存在的链式结构态,并与实验值比较。

表2  ${}^6\text{Li}(a, ad){}^4\text{He}$  反应中可能形成的链式结构态

入射粒子	入射能 $E_{in}(\text{L})$ MeV	链式结构态				实验能级		
		形成核	$E_{\text{MeV}}^*$	$J^\pi$	$T$	$E_{\text{MeV}}^*$	$J^\pi$	$T$
$p$	2.3	${}^7\text{Be}$	7.576	$\frac{1}{2}^- - \frac{3}{2}^-$	1/2	7.21	$\frac{5}{2}^-$	1/2
	7.32	${}^7\text{Be}$	11.88	$\frac{1}{2}^- - \frac{7}{2}^-$	1/2	11.01	$\frac{3}{2}^-$	3/2
$d$	3.77	${}^8\text{Be}$	25.12	$1^+ - 3^+$	0	25.2	$2^+$	0
	9.53	${}^8\text{Be}$	29.43	$0^+ - 4^+$	0	(28.6)		
${}^4\text{He}$	5.05	${}^{10}\text{B}$	7.49	$1^+ - 3^+$	0	7.467	$1^+$	
	7.35	${}^{10}\text{B}$	8.86	$2^+$	0	8.89	$2^+$	1
	12.24	${}^{10}\text{B}$	11.8	$0^+ - 4^+$	0	11.53		

综合表1与2看出,所预言的链式结构态能量与实验上已观测到的能级值相近,而且该能级的 $J^\pi$ 值亦在所预言的范围内。然而该能级是否肯定为链式结构态,尚待计算其他物理量与实验比较,尤其通过 $A(a, ax)B$ 型三体反应实验检验更是有力的证据。

由以上举例可知,只要知道了 $E_n^a, E_m^b$ ,即两个二体(集团)本征态,就可算出链式结构态的能量, $J^\pi$ 和 $T$ 值;反之,若从三体反应测量上找到链式结构态,就可研究它所化成的两个核的集团结构的性质。用(19)式计算 $E_{in}$ 或 $E_n^a$ 和 $E_m^b$ 是简单的,故对其他核的情况,这里不再赘述。

在上述简化模型中,计算共振项所用的 $\phi_n^a$ 和 $\phi_m^b$ 可选用已有的集团波函数(例如通常用共振群方法得到的)。从而可计算出跃迁振幅 $T_{fi}$ (用(12)或(14)式),于是不准计算三体反应截面。

## 四、讨 论

首先我们来讨论如何从实验上寻找链式结构态的问题。因为一般三体反应运动学完全测量的实验,是在 $\theta_1, \theta_2$ 满足准自由散射或末态相互作用条件下,测量 $\frac{d^3\sigma}{d\theta_1 d\theta_2 dE_1}$ 截面; $\theta_1$ 和 $\theta_2$ 分别是出射粒子1和2的出射角, $E_1$ 是出射粒子1的能量。若入射能量 $E_{in}$ 不同,在实验上必相应改变探测角 $\theta_1$ 和 $\theta_2$ ,故目前实验上,尚未看到链式结构态共振的出现。寻找此种态共振的方法之一是:选取尽量避开满足准自由散射和末态相互作用条件的一对角,测量 $\frac{d^3\sigma}{d\theta_1 d\theta_2 dE_1} - E_1$ 曲线,对 $dE_1$ 积分后得 $\frac{d^2\sigma}{d\theta_1 d\theta_2}(E_{in})$ ,改变入射能量 $E_{in}$ ,即测量 $\frac{d^2\sigma}{d\theta_1 d\theta_2} - E_{in}$ 曲线(相当于激发曲线)。当 $E_{in}$ 近似满足(19)式时,可能有链式结构态共振出现(由于可能有相干效应存在,应选若干对角度进行测量)。

其次,由第三节知道,当三个粒子之一质量较大时,略去耦合项的近似更好些。因而我们的公式更适用于研究靶核为中重核的  $(p, 2p)$ ,  $(p, np)$  等型反应,尤其是用于研究连续壳模型。应指出,虽然本文仅讨论了三体散裂反应,但对弹性和重排等反应不难推广。

## 参 考 文 献

- [1] L. R. Dodd et al., *Phys. Rev.*, **146** (1966), 675.
- [2] S. T. Epstein, *Phys. Rev.*, **106** (1957), 598.
- [3] R. Aaron et al., *Phys. Rev.*, **121** (1961), 319.
- [4] P. A. Kazaks et al., *Phys. Rev.*, **C1** (1970), 857.
- [5] R. Sugar et al., *Phys. Rev.*, **136** (1964), B472.
- [6] D. Eppel et al., *Nucl. Phys.*, **A240** (1975), 437.
- [7] M. Jain et al., *Nucl. Phys.*, **A153** (1970), 49.
- [8] K. M. Watson, *Phys. Rev.*, **88** (1952), 1163.  
A. B. Migdal, *ЖЭТФ* **23** (1955), 10.
- [9] P. A. Kazaks et al., *Phys. Rev.*, **C1** (1970), 1906.
- [10] A. K. Jain et al., *Nucl. Phys.*, **A142** (1970), 330.
- [11] H. Horiuchi et al., *Prog. Theory. Phys. (Suppl.)*, **52** (1972), 89.
- [12] F. Ajzenberg-Selove, *Nucl. Phys.*, **A248** (1975), 1.
- [13] D. R. Thompson et al., *Phys. Rev.*, **179** (1969), 971.
- [14] F. Ajzenberg-Selove et al., *Nucl. Phys.*, **A227** (1974), 1.

## THE RESONANCE OF THE CHAIN STRUCTURE STATES IN $A(a, ax)B$ TYPE THREE-BODY REACTIONS

HAN WEN-SHU ZHUANG FEI

(Institute of Atomic Energy, Academia Sinica)

### ABSTRACT

In this paper a calculable three-body T matrix with compact kernel is obtained by using multiplier's methods.

The formulations for calculating the  $A(a, ax)B$  type three-body reaction transition amplitudes are presented when plane wave or distorted wave is used for the incident and outgoing states.

This T matrix also includes the resonance terms of the three-body chain structure states besides quasi-free scattering terms and final states interaction terms.

A calculable formulation for the resonance energy of chain structure states is presented when it is expanded approximately into two two-body bound states. For  ${}^6\text{Be}$  and  ${}^6\text{Li}$  as target nuclei, the resonance energies are calculated. The results are in good agreement with the experimental values and the theoretical values of a molecule-like model. In order to check this kind of resonances, some experiments are proposed.