第3卷 第6期　　高能物理与核物理　　Vol. 3, No. 6
1979年11月　　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　　Nov., 1979

K–M 模型的 Cabibbo 转动和夸克质量的关系

吴丹迪
(高能物理研究所)

摘　　要

在有两个 Higgs 二重态的 K–M 模型中，引进置换对称 S_3，可以自然地得到近似地用夸克质量比表示的类 Cabibbo 参数矩阵。左、右手夸克填充 S_3 表示的方法的对称性是这个模型的特点。

一、引　　言

长期以来 Cabibbo 角[1]的起源以及(或者)它与弱作用理论中其他参数的关系，一直是一个引起兴趣的问题[2]。

Kobayashi 和 Maskawa (1973年)[3]曾经在弱电统一理论的框架下，借助 Higgs 机制，讨论了几种 $SU(2)\times U(1)$ 模型中可能的 Cabibbo 参数的数目。其中，最引起兴趣的是后来被称为 K–M 模型的六个夸克的模型，这六个夸克的左手征 (charality) 部分填充 $SU(2)$ 的三个二维表示，或者说分成三"行"[4]，夸克带电弱流可以写成

$$J_{\mu}=\sum_{ij}\bar{u}_i V^L_{ij}\gamma_\mu d_j, \tag{1}$$

这里 $1\leqslant i,\ j\leqslant 3$，是行的指标。为了书写方便，我们定义 $(u_1, u_2, u_3)=(u, c, t)$，$(d_1 d_2 d_3)=(d, s, b)$；$u$ 类夸克带电荷 2/3，d 类带电荷 $-1/3$。矩阵 V^L_{ij} 称为 CKM 转动矩阵，含有 4 个参数，具体形式为：

$$V^L\equiv(V^L_{ij})=\begin{pmatrix} c & -s_1c_3 & -s_1s_3\\ s_1c_2 & c_1c_2c_3-s_2s_3l^{i\delta} & c_1c_2s_3+s_2c_3e^{i\delta}\\ s_1s_2 & c_1s_2c_3+c_2s_3e^{i\delta} & c_1s_2c_3-c_2c_3e^{i\delta}\end{pmatrix}. \tag{2}$$

这里 $c_i=\cos\theta_i$，$s_i=\sin\theta_i$，θ_i，δ 都是实数，当 $\delta\neq 0$，提供 CP 破坏的相因子。由于带电弱流(1)原则上可以用实验测量，因此 CKM 矩阵具有模型无关的唯象意义。目前的实验支持它是一个与单位差别很小的非零转动矩阵[9]。

当人们对弱电统一规范理论作深入研究时，一个摆在面前的问题就是能否找到一种更好的模型结构1)，以便"自然地"[5]建立起模型参数之间的关系。显然，这样做就减少了理论的独立参数数目，从而增加了理论的予言力。用手任意写进的参数之间的关系称为

本文 1978 年 7 月 10 日收到。

1) 模型理论的结构，是指对称群的选择，费米子和 Higgs 粒子数目的规定及填充群表示的方法等等。

不自然的[5]. 众所周知的一个自然性关系的例子是在 Weinberg-Salam 模型中 $\cos\theta_W = m_W/m_Z$，这个关系是因为选择规范对称群为 $SU(2)\times U(1)$ 并规定 Higgs n 多重态的弱超荷 $y = n-1$ 而来的.

现在，我们关心的是，在某种意义上自然地规定 CKM 转动(2)的参数. 为了建立某种自然性的关系，常常要付出一些代价：或增加规范场[6]；或增加 Higgs 场和分立对称性[5,7]；或两者兼收并用[8,9]. 最近 Phys. Letters 上有许多讨论 $SU_L(2)\times SU_R(2)\times U(1)$ 模型中自然性关系的文章[8]，都属于最后一类，其中 Fritzsch[9] 就六个夸克的情形，得到了用夸克质量表示的全部 CKM 转动参数的数值. 关于 $SU(2)\times U(1)$ 模型的文章较少，不过 Pakvasa 和 Sugawara[7] 就 GIM 模型中 Cabibbo 角与夸克质量关系的讨论，可以说也是相当成功的，尽管所得结果与 Fritzsch 等的结果有重要差异. 寻找 CKM 转动与夸克质量的自然性关系，其所以可能，原因在于在弱电统一规范理论中，两者都起源于 Higgs 机制.

顺便指出，建立一个似乎合理的自然性关系，反过来，也提供一个由唯象的参数矩阵(2)了解夸克质量比的途径. 目前，夸克究竟有一个什么样的质量谱的问题，已经提到了研究的日程[10].

二、关于夸克质量

尽管在形式上，由 Higgs 机制产生的夸克质量是被很好定义的；但是，在物理上，夸克质量的定义到目前为止，仍然是十分含混的. 这种含混，可以从各种不同模型[11-13]所估计的 u, d, 夸克质量，小到几个 MeV[11]，大到几十 GeV[13] 看出. 出现这种情况，一方面因为到目前为止，没有发现自由的夸克；另一方面，由于强子动力学不完善，因此不能在强子的性质与夸克的质量之间建立可靠的关系. 我们知道，在固体中的电子，视其被束缚的松紧及其所参与物理过程交换能量的大小，可以表现为具有某一个有效质量或自由电子的质量. 可以想象，夸克在 Scaling 现象中，与在低能的强、电或弱衰变中都可能表现为不同的质量. 有一类夸克质量的模型估计，其特点为强子质量大于组分夸克的质量，这类模型被称为轻夸克模型[1)]. 在轻夸克模型下，常可以用一些似乎有理的办法，计算夸克质量的具体数值，作者在这方面也做了一个尝试. 在原子和原子核领域，我们碰到的是复合体系的总能量小于组分质量之和，复合体系总能量大于组分质量之和的一个数学模型是用谐振子势束缚在一起的两个粒子. 很可能轻夸克模型是渐近自由的势函数的特点. 各种计算夸克质量的工作，包括寻找 Cabibbo 角与夸克质量的关系，将有益于在物理上逐步澄清夸克质量的概念，并理解强子动力学.

轻（或类轻）夸克模型的一个显著特点是夸克质量差异很大. quarkonium 谱的离散性[13]. 支持这个观点. 分别用 k_i, l_i 表示夸克 d_i, u_i 的质量平方，夸克质量的离散性表示为

$$\begin{aligned} l_1 \ll l_2 \ll l_3, \\ k_1 \ll k_2 \ll k_3 \end{aligned} \tag{3}$$

1) 夸克质量极大的模型称为重夸克模型还有一些介乎两者之间的估计，可称为类轻的或类重的模型.

按照工作[11,12]对 u, d, s, c 夸克质量的估计，至少前两个大于记号代表大约一至两个数量级之差，根据工作[14]，可以认为这点对后两个大于记号也成立．在我们后面的计算中将要利用离散性假定(3)．

三、用 Higgs 机制获得自然性关系的一般方法

为了方便，用带上标"0"的记号表示弱作用 $SU(2)\times U(1)$ 的本征态，而用不带"0"的标志具确定质量的态．弱作用的本征态写为(参考(1)式下面的说明)：

$$\phi_{iL}^0=\begin{pmatrix}u_i^0\\ d_i^0\end{pmatrix},\quad u_{iR}^0,\quad d_{iR}^0,$$

或简记为行表象的列矩阵：

$$\phi_L^0=\begin{pmatrix}\phi_1^0\\ \phi_2^0\\ \phi_3^0\end{pmatrix}_L,\quad u_R^0=\begin{pmatrix}u_1^0\\ u_2^0\\ u_3^0\end{pmatrix}_R,\quad d_R^0=\begin{pmatrix}d_1^0\\ d_2^0\\ d_3^0\end{pmatrix}_R,\tag{4}$$

在有多个 Higgs 二重态的情况，最一般的 Higgs-夸克耦合为：

$$-\mathscr{L}_{\text{int}}=\sum_\alpha\bar{\Phi}_L^0\Gamma_\alpha^d\phi_\alpha^d d_R^0+\sum_\alpha\bar{\Phi}_L^0\Gamma_\alpha^u\phi_\alpha^u u_R^0+h、c.\tag{5}$$

这里耦合系数 Γ_α^d, Γ_α^u 都是行表象的 3×3 复数矩阵，α 是 Higgs 粒子的编号．真空自发破坏之后，由(5)产生一个质量矩阵．

$$M^{u,d}=\sum_\alpha\Gamma_\alpha^{u,d}\langle\phi_\alpha^{u,d}\rangle.\tag{6}$$

一般来说，$M^{u,d}$ 是两个任意复数矩阵，其中每一个都可以通过两个么正矩阵变成半正定的对角矩阵 $D^{u,d}$, $D^{u,d}$ 的对角元素具有夸克质量的意义．变换方法如下：

$$\begin{aligned}\bar{u}_L^0&=\bar{u}_LU_L^+(u),\quad u_R^0=U_R(u)u_R,\\ \bar{d}_L^0&=\bar{d}_LU_L^+(d),\quad d_R^0=U_R(d)d_R.\end{aligned}\tag{7}$$

$$(U_L^{d,u})^+M^{d,u}U_R^{d,u}=D^{d,u},\tag{8}$$

其中矩阵 U_R^L 分别通过对角化厄密矩阵 MM^+ 和 M^+M 来得到：

$$U_L^+MM^+U_L=D^2.\tag{9}$$

$$U_R^+M^+MU_R=D^2.\tag{10}$$

在变换(7)下，夸克带电弱流变为：

$$\bar{u}_LU_L^+(u)U_L(d)\gamma_\mu d_L.\tag{11}$$

同(1)式比较有：

$$V_L=U_L^+(u)U_L(d).\tag{12}$$

我们看到，Higgs 机制通过(6)、(8)两式产生夸克质量，又通过(12)式给出一般的 CKM 转动．因此，如果用某种对称性理由来限制矩阵(6)的形式，就可以在夸克质量与 CKM 转动参数间建立自然的关系．

加到部分拉氏量(5)上的对称性，必须是拉氏量的其他部分也具有的对称性．弱电规范理论的最大特点是：夸克与规范场的原始作用是被非常严格地规定的．

$$\mathscr{L}_{\rm kin} = \sum_{i=1}^{3} (\bar{\phi}^0_{iL} D^L_\mu \gamma_\mu \phi^0_{iL} + \bar{u}^0_{iR} D^{Ru}_\mu \gamma_\mu u^0_{iR} + \bar{d}^0_{iR} D^{Rd}_\mu \gamma_\mu d^0_{iR}), \tag{13}$$

显然，这部分拉氏量除了 $SU(2)\times U(1)$ 规范对称外，还有三行之间的整体连续变换对称性 $SU_L(3)\times SU^u_R(3)\times SU^d_R(3)$. 如果把这些连续对称加到 Higgs 上去，以便对(6)式加上限制，那么在真空自发破坏以后，将产生许多 Goldstone 粒子，这是一个麻烦. 为了避免这个困难，可以把(13)式中所包含的分立对称性加到 Higgs 部分去. 当 Higgs 是分立变换的非平庸表示，这意味着需要不止一个 Higgs 二重态. 但是 Higgs 与费米子的耦合方式受到了限制，从而使质量矩阵参数减少.

设有一种分立变换 K.

规范场在分立变换下不变，其他场作如下变换:

$$\begin{aligned} &K\phi_L K^{-1} = K_L \phi_L, \quad K\phi^{u,d}_R K^{-1} = K^{u,d}_R \phi^{u,d}_R, \\ &K\phi^{u,d}_\alpha K^{-1} = e^{i\chi^{u,d}_\alpha} \phi^{u,d}_\alpha. \end{aligned} \tag{14}$$

这里 K_L, $K^{u,d}_R$, 是三个 3×3 么正矩阵，$\chi^{u,d}_\alpha$ 是实参数，显然此变换不改变原始的动能项(13)，要它们不改变(5)式，这意味着对系数 $\Gamma^{u,d}_\alpha$ 的限制.

$$(K_L)^+ \Gamma^{u,d}_\alpha K^{u,d}_R = \Gamma^{u,d}_\alpha e^{-i\chi^{u,d}_\alpha}. \tag{15}$$

由(6)式:

$$\begin{aligned} m^{u,d} &\equiv M^{u,d}(M^{u,d})^+ \\ &= \left(\sum_\alpha \Gamma^{u,d}_\alpha \langle \phi^{u,d}_\alpha \rangle_0\right)\left(\sum_\beta \Gamma^{u,d}_\beta \langle \phi^{u,d}_\beta \rangle_0\right)^+. \end{aligned} \tag{16}$$

如果只有一个 Higgs 二重态，那么由(15)、(16)式不难得到:

$$m^{u,d} = K^+_L m^{u,d} K_L. \tag{17}$$

这是 Gatto[15] 等人所得到的结果，在(17)式成立时，不可能得到合理的自然性关系[1)]. 但是当存在不止一个 Higgs 二重态时，(17)式就不能成立. Gatto 的工作[2)]说明为了得到有意义的 CKM 转动，一个必要条件是如下两个不等式至少有一个成立:

$$[m^{u,d}, K_L] \neq 0. \tag{18}$$

Higgs 机制本身带有很大的唯象性质，是理论中一个最不清楚的部分，它在理论中担负了过多的责任. 如果批评说:“前面介绍的方案对 Higgs 部分采取了过分认真的态度”，这样的批评是有道理的. 但是在没有找到更好的代替办法以前，我们只好还是在 Higgs 上作文章.

四、一个 S_3 对称模型

同 Pakvasa 和 Sugawara[7] 略有不同，我们取两个 $SU(2)$ 的二重态 Higgs 场，Higgs

1) 不合理的关系，指得到 $\theta_c = 0$, $\frac{\pi}{2}$ 或任意这样一类结果.

2) Gatto[15] 工作的后半部分至少没有包括如下两种情况，在这两种情况下都可以得到合理的 Cabbibo 角一质量关系: a. 如果在推导这种关系的某一步上加上了不自然的条件[7]; b. 如果在所得关系中包含任意参数，如本文所做的.

与费米子填充 S_3 表示的方法是：

$$\{\phi_1 \quad \phi_2\}. \tag{19}$$

$$\begin{aligned} &\psi^0_{1L} \ \{\psi^0_{2L},\ \psi^0_{3L}\}, \\ &d^0_{1R} \ \{d^0_{2R},\ d^0_{3R}\}, \\ &u^0_{1R} \ \{u^0_{2R},\ u^0_{3R}\}. \end{aligned} \tag{20}$$

这里记号 $\{A, B\}$ 表示 A, B 是 S_3 的二重态.

Higgs 场的势函数为[7]：

$$\begin{aligned} V(\phi) = &-\mu^2(\bar{\Phi}_1\phi_1 + \bar{\Phi}_2\phi_2) + a(\bar{\Phi}_1\phi_1 + \bar{\Phi}_2\phi_2)^2 + b(\bar{\Phi}_1\phi_2 - \bar{\Phi}_2\phi_1)^2 \\ &+ c\{(\bar{\Phi}_1\phi_1 - \bar{\Phi}_2\phi_2)^2 + (\bar{\Phi}_1\phi_2 + \bar{\Phi}_2\phi_1)^2\}. \end{aligned} \tag{21}$$

寻找 $V(\phi)$ 在 $\langle\phi_1\rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi e^{i\alpha} \end{pmatrix}$ $\langle\phi_2\rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi e^{i\beta} \end{pmatrix}$ 处的极值 ($\xi \neq 0$), 发现当 $a + c > 0$ 并 $b + c < 0$, $V(\phi)$ 有极值,条件为 $\alpha - \beta = n \cdot \frac{\pi}{2}$, 这里 n 是任意偶数[1]. 如果我们的世界恰好落在 $\alpha - \beta = 0$ 的真空中,那么当 $\alpha = \beta$ 变化时不改变问题的本质, 可以令 $\alpha = \beta = 0$. 以后我们就取这样的真空来计算. $SU(2) \times U(1) \times S_3$ 不变的夸克-Higgs 耦合为：

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{\text{int}} = &-g_1[(\bar{\psi}^0_{2L}d^0_{3R} + \bar{\psi}^0_{3L}d^0_{2R})\phi_1 + (\bar{\psi}^0_{2L}d^0_{2R} - \bar{\psi}^0_{3L}d^0_{3R})\phi_2] \\ &- g_2(\bar{\psi}^0_{1L}d^0_{2R}\phi_1 + \bar{\psi}^0_{1L}d^0_{3R}\phi_2) + h.c. \\ &- g_3(\bar{\psi}^0_{2C}d^0_{1R}\phi_1 + \bar{\psi}^0_{3L}d^0_{1R}\phi_2) \\ &+ \text{包含 } u^0_{iR} \text{ 的部分}. \end{aligned} \tag{22}$$

真空自发破坏后,分立对称性也不复存在, d 类夸克质量矩阵为：

$$M^d = \begin{pmatrix} 0 & g_2\xi & g_2\xi \\ g_3\xi & g_1\xi & g_1\xi \\ g_3\xi & g_1\xi & -g_1\xi \end{pmatrix}. \tag{23}$$

平方质量矩阵 m^d 具有如下形式：

$$m^d = \begin{pmatrix} 2b^2 & 2abe^{i\phi} & 0 \\ 2abe^{-i\phi} & 2a^2 + c^2 & c^2 \\ 0 & c^2 & 2a^2 + c^2 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

这里 a, b, c, ϕ 是一套待定实参数. 按照(20), K_L 的形式是：

$$\begin{pmatrix} \times & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{pmatrix},$$

(24)式中被虚线框起的部分不是单位矩阵,因此,根据舒尔引理, Gatto 条件 (18) 显然被满足.

注意到条件(3),如果把 k_1/k_2 与 k_2/k_3 看作同级小量,忽略这些小量的一级修正,参数 a, b, c 可以用质量平方 k_1, k_2, k_3 表示：

---

1) n 为奇数的解(条件是 $a - b > 0$, $b + c > 0$) 给出转动很大的 K-M 矩阵,与实验不符.

$$c^2=k_3/2,\quad b^2=k_1,\quad a^2=k_2/2, \tag{25}$$

相应于特征值 k_1, k_2, k_3 的精确到同样程度的本征向量不难求出,并得到么正矩阵:

$$U_L^d \simeq \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{k_1/k_2}\,e^{i\phi} & 0 \\ -\sqrt{k_1/2k_2}\,e^{-i\phi} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{k_1/2k_2}\,e^{-i\phi} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \tag{26}$$

类似地可以求出 U_L^u, 它与 U_L^d 有相同的形式,只是以 l_1, l_2, l_3 和 η 分别代替 (26) 式中的 k_1, k_2, k_3 和 ϕ, 据(12)式得

$$V_L \approx \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{\dfrac{k_1}{k_2}}\,e^{i\phi}-\sqrt{\dfrac{l_1}{l_2}}\,e^{i\eta} & 0 \\ -\sqrt{\dfrac{k_1}{k_2}}\,e^{-i\phi}+\sqrt{\dfrac{l_1}{l_2}}\,e^{-i\eta} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{27}$$

(27)式中的相因子,在改变 u_i, d_i 的相因子规定以后,可以挪到与 K-M 形式(2)同样的位置[1]. 计及可能有 $k_1/k_2 \gg l_1/l_2$, 我们得到:

$$\mathrm{tg}\theta_c \approx |a_{12}/a_{11}| \approx \sqrt{k_1/k_2}=md/ms. \tag{28}$$

这个结果与 Pakvasa-Sugawara[7] 是一样的. 另外,我们注意到,矩阵(27)除了二个非对角元素以外,其他的非对角元素在 $\sqrt{k_1/k_2}$ 或 $\sqrt{k_2/k_3}$ 量级上为 0, 即至少为 k_1/k_2 级小量,因此 CP 破坏也是很小的.

值得指出的是,当改变(20)式中下面两排的粒子的编号方式时(例如写 d_{2R}^0, $\{d_{1R}^0, d_{3R}^u\}$ 等等),结果(27)和(28)不改变. 而且,在对角化质量矩阵(24)时,须解一个三次方程,(25)式只是其中一个可能的解. 取其他的解,结果(27),(28)也是不变的.

五、讨 论

作者曾就 S_3 对称的各种可能的 Higgs 选择和费米子填充方案做过尝试,分别得到过 k_1/k_2 平方级和一次方级的非零 CKM 转动. 在其中很多方案里,左手或右手三种夸克的线性组合才是 S_3 的本征态;与那些模型不同,第四节讨论的模型, $SU(2)$ 的本征态也是 S_3 的本征态,而且左、右手夸克填充 S_3 本征态的方式是对称的. 这是一个可能引起兴趣的特点.

一个重要的问题是我们所得的结果与 Fritzsch[9] 等的结果不同,在 $SU_L(2)\times SU_R(2)\times U(1)$ 模型下,所有发表的方案都得到 $\mathrm{tg}\,\theta_c \approx (k_1/k_2)^{1/4}$, 而我们得到的是 $\mathrm{tg}\,\theta_c \approx (k_1/k_2)^{1/2}$. 这个差别,也许是 $SU(2)\times U(1)$ 与 $SU(2)\times SU(2)\times U(1)$ 两类规范模型的一个本质性差异.

1) 在行表象,相因子的重新规定用对角的么正矩阵表示,因此(27)式允许左右各乘一个任意的对角么正矩阵.

另一个问题是，当我们引进多个 Higgs 二重态时，就要破坏 Glashow-Weinberg[16] 所提出的自然压低 $\Delta S = 1$ 的中性流的条件，但是这并不一定意味着所讨论的模型会有很大的 $\Delta S = 1$ 的中性流，关于这个问题究竟如何解决，将在另外的文章讨论．

参　考　文　献

[1] N. Cabibbo, *Phys. Rev. Lett.*, **10**(1963), 531.
[2] R. Gatto, G. Sartori and M. Tonin, *Phys. Lett.*, **28B** (1968), 128;
N. Cabibbo, L. Maiani, *Phys. Lett.*, *dito* 131.
[3] M. Kobayashi and K. Maskawa, *Progr. Theor. Phys.*, **49**(1973), 652.
[4] 吴丹迪、伍经元、李小源，高能物理与核物理，**2** (1978), 42.
[5] H. Georgi and A. Pais, *Phys. Rev.*, **D10**(1974), 539.
[6] 邝宇平、马中骐、许伯威、易余萍，物理学报，**24** (1975), 291.
A. Pais, *Phys. Rev.*, **D8**(1973), 625.
[7] S. Pakvasa and H. Sugawara, *Phys. Lett.*, **73B** (1978), 61 页及所引文献.
[8] F. Wilczek and Z. Zee, *Phys. Lett.*, **70B**(1977), 418.
[9] H. Fritzsch, *Phys. Lett.*, **73B** (1978), 317.
[10] 朱洪元，黄山会议报告，1977 年 8 月.
[11] S. Weinberg, HUTP—77/A 057, (Haward 预印本).
[12] J. F. Gunion, P. C. McNamee and M. P. Scaderon. SLAC-Pub-1847 (1976).
[13] 胡宁，科学通报，**23**(1978), 129.
I. Greenberg and C. Nelson, *Phys. Reports*, **32C**(1977), 71.
[14] 伍经元、李小源、吴丹迪，高能物理与核物理，**3** (1979), 108.
[15] R. Barbieri, R. Gatto and F. Strocchi, *Phys. Lett.*, **74B**(1978), 344.
[16] S. L. Glashow and S. Weinberg, *Phys. Rev.*, **D15**(1977), 1958.

THE RELATION BETWEEN CABIBBO-LIKE PARAMETERS AND QUARK MASSES IN THE K-M MODEL

WU DAN-DI

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

In the K-M model with two Higgs doublets we introduce permutation symmetry S_3 and naturally obtain the Cabibbo-Like parameter matrix represented approximately by the ratios of the quark masses. The symmetry of S_3 representation assignments between right and left-handed quarks is a characteristic of this model.