

# Bakamjian-Thomas 理论中的相移行为

鲍诚光 赵维勤

(中国科学院高能物理研究所)

## 摘 要

本文在 B-T 理论的框架内,探讨了高能相移的行为及其与唯象核力的实部和虚部  $V_R - iV_I$  的关系. 得到  $\text{Re}\delta_l \xrightarrow{E \rightarrow \infty} -\frac{1}{2\hbar c} \int_0^\infty V_R(r) dr$ ,  $\text{Im}\delta_l \xrightarrow{E \rightarrow \infty} \frac{1}{2\hbar c} \int_0^\infty V_I(r) dr$ . 发现陡的排斥心会引起  $\text{Re}\delta_l$  的特征振荡; 并发现  $\text{Im}\delta_l$  对  $V_I$  是敏感的. 因而,较高能量的相移分析工作对决定核力的排斥心与虚部是重要的.

关于 N-N 低能 (350MeV 以下) 相移分析的工作已进行了多年, 从中得到了许多关于核力外区的知识, 但不能提供对核力内区——排斥心——的了解. 另一方面, 高能相移分析在技术上是困难的, 但对研究核力内区是很有用的. 为此, 近年来已有人在从几百 MeV 到 3 GeV 的能区从事相移分析工作<sup>[1]</sup>. 在这一能区, 相对论效应已比较重要, 并将随能量的增加而日益重要. 为了估计这一效应, 我们想探讨一下, 在考虑了相对论修正之后, 势散射理论中相移的高能行为会有什么定性的改变. 这时薛定格方程已不适用. 我们采用了 B-T 理论提出的包含了相对论运动学修正的二体静态方程<sup>[2,4]</sup>:

$$[T_1 + T_2 + V_{12}(\mathbf{r})]\phi = E\phi. \quad (1)$$

方程(1)仅在质心系中成立, 其中  $\phi$  是质心系的静态解,  $\mathbf{r}$  是相对坐标, 算符  $T_1$  由以下两式定义 ( $T_2$  有类似的定义):

$$\begin{aligned} T_1 j_l(Zr) Y_{lm} &= (Z^2 + m_1^2)^{1/2} j_l(Zr) Y_{lm}, \\ T_1 n_l(Zr) Y_{lm} &= (Z^2 + m_1^2)^{1/2} n_l(Zr) Y_{lm}, \end{aligned} \quad (2)$$

其中复数  $Z$  与  $(Z^2 + m^2)^{1/2}$  根据物理要求可限定在复平面的第一象限 (包括正实轴和正虚轴). 根据 (2) 式, 对任何物理状态  $\phi$ , 有:

$$T_1 \phi = \int T_1 |\mathbf{k}\rangle d\mathbf{k} \langle \mathbf{k} | \phi \rangle = \int \sqrt{k^2 + m^2} |\mathbf{k}\rangle d\mathbf{k} \langle \mathbf{k} | \phi \rangle. \quad (3)$$

因此可以认为在量子力学体系中,  $T_1$  有明确的定义, 而且它显然是薛定格方程的动能算符在相对论情况下的直接推广.

可以证明方程 (1) 满足厄米性和么正性<sup>[4]</sup> (参见附录). 它的  $H$  量是非齐次罗伦兹群

的一个生成元。对于空间转动和平移不变的位，它的解满足相对论协变性的基本要求<sup>[2]</sup>。它有正确的非相对论限。Hahn 和 Rule 曾用这一方程研究过高能散射中取等效相互作用的问题<sup>[3]</sup>。在文献[5]中，利用数值求解这一方程，计算了氘核束缚态、介子谱和相移等。在文献[4]中，曾用它计算了高能散射振幅和截面，结果是合理的。在本文中，提出了另一种求解方程(1)的近似方法，由此可得到分波解和相移的解析形式，并据此研究相移在能量较高时的行为及其高能限，并讨论核力对它的影响。

我们设想排斥心是有限的。因为任何“基本”粒子都是有“结构”的，任何“结构”的牢固性都是有限的，因而它不可能对“入侵者”提供无限的排斥。进一步假定有限的排斥心在零点附近较为平滑。据此，我们将  $V_{12}(\mathbf{r})$  近似地写成  $n$  个矩形势之和 ( $n$  是一个大数)。我们把  $r$  分成  $n+1$  段。在第  $i$  段

$$V_{12}(\mathbf{r}) = V_i. \quad (a_{i-1} < r \leq a_i) \quad (4)$$

特别是当  $r > a_n$  时

$$V_{12}(\mathbf{r}) = V_{n+1} = 0.$$

另外，把  $\phi$  的  $l$  分波的径向部分也分成  $n+1$  段，其第  $i$  段为  $\phi_{l,i}$ 。为了数学上的方便，我们先假定  $m_1 = m_2 = m$ ，并且先讨论  $V_{12}(\mathbf{r})$  为实的向心位阱的情况。由于  $V_i$  是一常数，利用  $T_i$  的定义，方程(1)很容易在第  $i$  段解出：

$$\phi_{l,i} = A_{ij_l}(I_i r) + B_i n_i(I_i r), \quad (5)$$

其中 
$$I_i = \frac{1}{2} [(E - V_i)^2 - 4m^2]^{1/2}, \quad (6)$$

特别有 
$$I_{n+1} = k = \frac{1}{2} (E^2 - 4m^2)^{1/2}, \quad (7)$$

显然， $\phi_{l,i}$ 、 $\phi_{l,i+1}$  应连接起来。利用函数连续和函数导数连续的条件得：

$$\begin{pmatrix} A_{i+1} \\ B_{i+1} \end{pmatrix} = M^{(i)} \begin{pmatrix} A_i \\ B_i \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^i M^{(j)} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}. \quad (8)^D$$

其中矩阵  $M^{(i)}$  的元为：

$$\begin{aligned} M_{11}^{(i)} &= I_{i+1} a_i^2 [n_i(I_{i+1} a_i) j'_i(I_i a_i) - n'_i(I_{i+1} a_i) j_l(I_i a_i)], \\ M_{12}^{(i)} &= I_{i+1} a_i^2 [n_i(I_{i+1} a_i) n'_i(I_i a_i) - n'_i(I_{i+1} a_i) n_l(I_i a_i)], \\ M_{21}^{(i)} &= -I_{i+1} a_i^2 [j_l(I_{i+1} a_i) j'_i(I_i a_i) - j'_i(I_{i+1} a_i) j_l(I_i a_i)], \\ M_{22}^{(i)} &= -I_{i+1} a_i^2 [j_l(I_{i+1} a_i) n'_i(I_i a_i) - j'_i(I_{i+1} a_i) n_l(I_i a_i)]. \end{aligned} \quad (9)$$

由于波函数必须在原点正规，令  $A_1 = 1$ ， $B_1 = 0$ ，得

$$\phi_{l,i} = \left[ \prod_{j=1}^{i-1} M^{(j)} \right]_{11} j_l(I_i r) + \left[ \prod_{j=1}^{i-1} M^{(j)} \right]_{21} n_l(I_i r). \quad (10)$$

由此得相移

$$\delta_l = \text{tg}^{-1} B_{n+1} / A_{n+1} = \text{tg}^{-1} \left[ \prod_{j=1}^n M^{(j)} \right]_{21} / \left[ \prod_{j=1}^n M^{(j)} \right]_{11}. \quad (11)$$

1) 注意此处定义的连乘的次序为：

$$\prod_{j=1}^i M^{(j)} = M^{(i)} \cdot M^{(i-1)} \cdots M^{(2)} \cdot M^{(1)}.$$

可以证明,当能量很高且排斥心在零点附近较平滑时,利用矩阵  $M^{(i)}$  中  $j_l$  与  $n_l$  的渐近性质可得

$$M^{(i)} \simeq M^{(i,1)} + M^{(i,2)}, \quad (12)$$

其中

$$M^{(i,1)} = \frac{I_+^{(i)}}{2I_i} \begin{pmatrix} \cos(I_-^{(i)} a_i) & \sin(I_-^{(i)} a_i) \\ -\sin(I_-^{(i)} a_i) & \cos(I_-^{(i)} a_i) \end{pmatrix}, \quad (13.1)$$

$$M^{(i,2)} = (-1)^l \frac{I_-^{(i)}}{2I_i} \begin{pmatrix} -\cos(I_+^{(i)} a_i) & \sin(I_+^{(i)} a_i) \\ \sin(I_+^{(i)} a_i) & \cos(I_+^{(i)} a_i) \end{pmatrix}, \quad (13.2)$$

$$I_+^{(i)} = I_{i+1} + I_i, \quad I_-^{(i)} = I_{i+1} - I_i.$$

由于高能时  $I_+^{(i)} \gg I_-^{(i)}$ , 于是  $M^{(i,1)} \gg M^{(i,2)}$ , 因而

$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{pmatrix} = \left\{ \prod_{j=1}^n M^{(j,1)} + \sum_{j=1}^n M^{(n,1)} \dots M^{(j+1,1)} M^{(j,2)} M^{(j-1,1)} \dots M^{(1,1)} \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

注意到 (13) 式与转动矩阵的相似性, (14) 式很易求出. 若令  $\Delta_j = a_j - a_{j-1}$ , 可得

$$\delta_l = \text{tg}^{-1}$$

$$\frac{\left\{ -\sin \left[ \sum_{j=1}^n (k - I_j) \Delta_j \right] + (-1)^l \sum_{j=1}^n \frac{I_{j+1} - I_j}{I_{j+1} + I_j} \sin \left[ \sum_{j'=j+1}^n (k - I_{j'}) \Delta_{j'} + \sum_{j'=1}^j (k + I_{j'}) \Delta_{j'} \right] \right\}}{\left\{ \cos \left[ \sum_{j=1}^n (k - I_j) \Delta_j \right] - (-1)^l \sum_{j=1}^n \frac{I_{j+1} - I_j}{I_{j+1} + I_j} \cos \left[ \sum_{j'=j+1}^n (k - I_{j'}) \Delta_{j'} + \sum_{j'=1}^j (k + I_{j'}) \Delta_{j'} \right] \right\}}, \quad (15)$$

其中  $k - I_j$  又可展开如下:

$$k - I_j = V_j/2 + V_j m^2/4k^2 + O(1/k^3). \quad (16)$$

(15) 中的  $n$  可以取得很大, 使求和号近似地用积分代替  $n$ , 最后当  $n$  很大时,

$$\delta_l = \text{tg}^{-1} \frac{-\sin u - \frac{m^2 u}{2k^2} \cos u + (-1)^l \cdot \beta}{\cos u - \frac{m^2 u}{2k^2} \sin u - (-1)^l \cdot \alpha} \quad (17.1)$$

$$= \text{tg}^{-1} \frac{-\sin \left( u + \frac{m^2}{2k^2} u \right) + (-1)^l \cdot \beta}{\cos \left( u + \frac{m^2}{2k^2} u \right) - (-1)^l \cdot \alpha}, \quad (17.2)$$

其中

$$\beta = - \int_0^\infty \frac{dV/dr}{4k} \sin(u_r^\infty - u_0^\infty + 2kr) dr,$$

$$\alpha = - \int_0^\infty \frac{dV/dr}{4k} \cos(u_r^\infty - u_0^\infty + 2kr) dr, \quad (18)$$

$$u_{r_1}^\infty = \frac{1}{2} \int_{r_1}^{r_2} V(r) dr, \quad u = u_0^\infty. \quad (19)$$

这样, 我们得到了一个高能相移依赖于  $V$ ,  $\frac{dV}{dr}$ ,  $k$ ,  $m$  的解析表达式. 由于核力排斥心的外缘很陡, 因而对  $\beta$ 、 $\alpha$  的贡献主要来源于  $\left| \frac{dV}{dr} \right|$  很大的排斥心外缘部分. 这时, (18)

式的积分可只从  $r_0 - \Delta$  积到  $r_0 + \Delta$  ( $r_0$  是排斥心外缘的平均位置,  $2\Delta$  是排斥心外缘

的厚度)。又注意到在 高能条件下  $u_r^\infty - u_0^\infty$  随  $r$  的变化比  $2kr$  缓慢得多, 这时得

$$\begin{aligned}\beta &\simeq \frac{-\frac{dV}{dr}\Big|_{r=r_0}}{4k^2} \sin(u_{r_0}^\infty - u_0^\infty + 2kr_0) \sin(2k\Delta), \\ \alpha &\simeq \frac{-\frac{dV}{dr}\Big|_{r=r_0}}{4k^2} \cos(u_{r_0}^\infty - u_0^\infty + 2kr_0) \sin(2k\Delta).\end{aligned}\quad (20)$$

(17.1) 中的分子、分母各有三项。第一项是完全由位阱决定的常数, 第二、三项均正比于  $1/k^2$ 。由此得到以下结论:

i) 对于给定的分波  $l$ , 当  $k \rightarrow \infty$  时相移趋于常数:

$$\delta_l \rightarrow -u = -\frac{1}{2\hbar c} \int_0^\infty V(r) dr. \quad (21)^{1,2)}$$

这是高能时  $k - I_l$  趋于常数的结果(见(16)式), 这显然是一种相对论运动学效应。反之, 非相对论运动学给出当  $k \rightarrow \infty$  时,  $I_l \rightarrow k$ , 从而导致  $\delta_l \rightarrow 0$ 。同时, (21) 式表明, 排斥心的作用是把相移拉向负值。该式对研究核力特别是排斥心的性质有重要作用。

ii) 第三项即  $\beta$  和  $\alpha$  是对排斥心很敏感的项, 它导致相移以振荡的方式趋于其极限。振荡的幅度主要由排斥心边缘的平均陡度, 即  $dV/dr$  决定。振荡有两种特征频率, 其  $k$  的周期各为

$$\frac{\pi\hbar c}{\Delta} \quad \text{及} \quad \frac{\pi\hbar c}{r_0} \quad (22)$$

分别由排斥心边缘的厚度及平均位置决定。由于一般有  $r_0 \gg \Delta$ , 因此主要观察到的是后一个周期较短的振荡(具有 GeV 的量级)。

iii) 对于给定的若干偶分波 ( $S, D, \dots$ ), 相移均以一致的方式趋于极限  $-u$ , 而对于奇分波 ( $P, F, \dots$ ), 则均以另一种完全相反的方式趋于同一极限  $-u$ , 奇、偶波相移的峰、谷恰恰相对。

以上表明, (21)、(22) 式提供了对排斥心高度和宽度的重要判据。特别是, 高能相移是否存在振荡是核力中是否有陡的排斥心的重要判据。虽然从实验上确定几个 GeV 能区(质心系)的相移是困难的, 但由于高能相移对核力的内部结构如此敏感, 或许朝这方向作出努力是值得的。

作为一个例子, 在  $m_1 = m_2 = 939$  MeV, 位阱为方位阱加方排斥心的情况下选了二组参数严格求解方程(1), 计算了低分波的相移。方位阱阱深都取为  $-50$  MeV, 力程  $1.6$  fm, 排斥心高都取为  $1400$  MeV, 力程第 I 组为  $0.47$  fm, 第 II 组为  $0.4$  fm (其中第一组参数能解释低能相移资料)。所得结果如下:

图 1 是  $S$  波相移。曲线 I、II 分别对应于两组参数。为了比较, 亦给出用薛定格方程计算的结果——曲线 I'、II'。可以看出, 曲线 I'、II' 是趋于零的, 而 I、II 则趋于固定的极限, 并且呈现了排斥心的陡边所引起的振荡。由于第一组参数排斥心力程较长, 使

1) (21) 式以前的  $\hbar, c$  均略写。

2) 本文的近似不适用于  $l$  很大的情况, 也不适用于当  $r \rightarrow 0$  时  $V(r) \rightarrow \infty$  或变化激烈的情况。一般讲,  $l$  愈小近似愈好;  $r \rightarrow 0$  时  $V(r)$  愈光滑, 近似愈好。

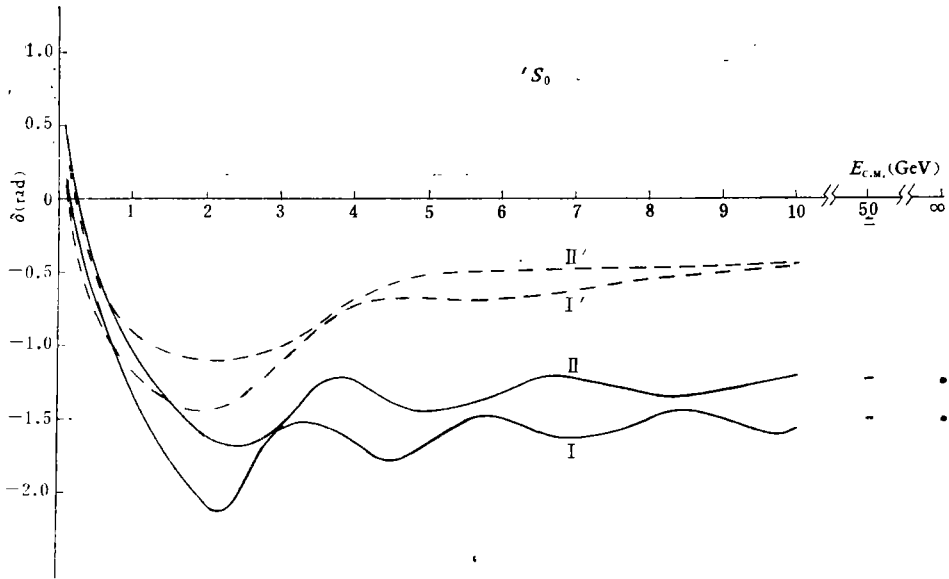


图 1

得排斥心的作用更强,从而使曲线 I 处于更下方的位置,并且具有较短的振荡周期。

图 2 是在第 I 组核力参数下对  $S$ 、 $P$ 、 $D$  波相移的计算结果。可以看出不同分波趋于同一极限,  $S$ 、 $P$  波相移具有相同的振荡周期和相反的相位,而  $D$  波相移则随能量的增高而趋于  $S$  波相移。

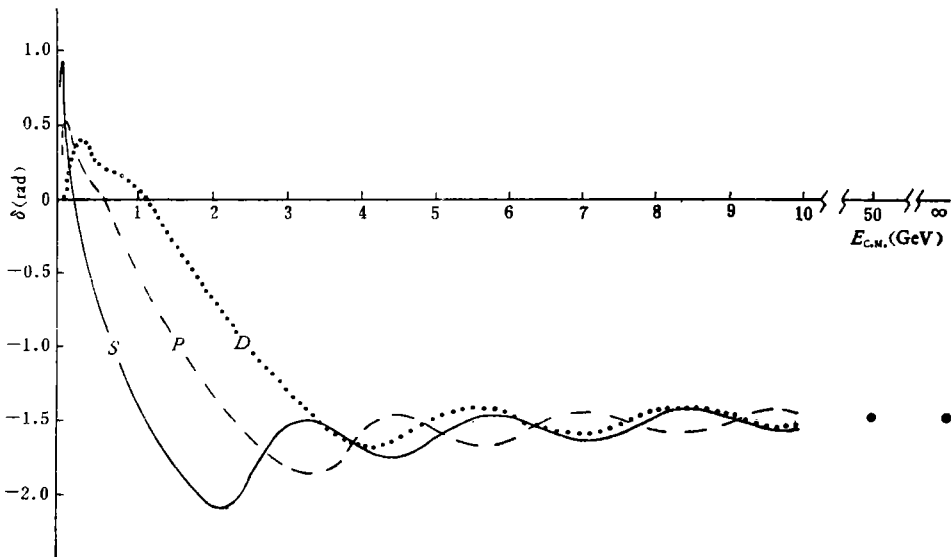


图 2

由于高能散射时存在非弹性道和弹性道的耦合,这导致虚位阱的出现<sup>[4]</sup>。我们以下将研究  $m_1 \approx m_2$ ,  $V = V_R - iV_I$  ( $V_I > 0$ ) 的情况。这时方程(1)的求解仍可用前述的

办法,但是

$$I = \frac{E - V}{2} \left( 1 - \frac{(m_1 + m_2)^2}{(E - V)^2} \right)^{1/2} \left( 1 - \frac{(m_1 - m_2)^2}{(E - V)^2} \right)^{1/2} \equiv x + iy, \quad (23)$$

$x, y$  为实数,  $I$  是复数.

$$I_{n+1} = k = \frac{E}{2} \left( 1 - \frac{(m_1 + m_2)^2}{E^2} \right)^{1/2} \left( 1 - \frac{(m_1 - m_2)^2}{E^2} \right)^{1/2}, \quad (24)$$

利用(23)式求出各段的  $I_i$  之后,代回(9)式可求出  $M^{(i)}$ ,从而得到  $A_{n+1}$  和  $B_{n+1}$ . 这时它们都是复数. 令

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= a + ic, \\ B_{n+1} &= b + id, \end{aligned} \quad (25)$$

$a, b, c, d$  为实数. 在能量很高,排斥心仍满足前述性质的条件下,(13)、(14)式都是成立的. 由此得

$$\left. \begin{aligned} a &= \cos \omega_{R_0}^{\infty} \text{ch} \omega_{i_0}^{\infty} - (-1)^l \int_0^{\infty} dr (R_1 \cos R_2 \text{ch} \theta_2 + \theta_1 \sin R_2 \text{sh} \theta_2), \\ c &= -\sin \omega_{R_0}^{\infty} \text{sh} \omega_{i_0}^{\infty} + (-1)^l \int_0^{\infty} dr (R_1 \sin R_2 \text{sh} \theta_2 - \theta_1 \cos R_2 \text{ch} \theta_2), \\ b &= -\sin \omega_{R_0}^{\infty} \text{ch} \omega_{i_0}^{\infty} + (-1)^l \int_0^{\infty} dr (R_1 \sin R_2 \text{ch} \theta_2 - \theta_1 \cos R_2 \text{sh} \theta_2), \\ d &= -\cos \omega_{R_0}^{\infty} \text{sh} \omega_{i_0}^{\infty} + (-1)^l \int_0^{\infty} dr (R_1 \cos R_2 \text{sh} \theta_2 + \theta_1 \sin R_2 \text{ch} \theta_2), \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

其中

$$\begin{aligned} R_1 &= R e^{\frac{dI}{dr}}, & \theta_1 &= \text{Im} \frac{dI}{dr}, \\ R_2 &= \omega_{i_r}^{\infty} - \omega_{R_0}^r + 2kr, & \theta_2 &= \omega_{i_r}^{\infty} - \omega_{i_1}^r, \\ \omega_{R_1}^r &= \int_{r_1}^{r_2} (k - x) dr, & \omega_{i_1}^r &= - \int_{r_1}^{r_2} y dr. \end{aligned} \quad (27)$$

再利用公式

$$\text{Re} \delta_l = \text{tg}^{-1} \frac{(a+d)(c+b) - (a-d)(c-b)}{\sqrt{(a-d)^2 + (c+b)^2} \cdot \sqrt{(a+d)^2 + (c-b)^2 + a^2 - d^2 + c^2 - b^2}}, \quad (28)$$

$$\text{Im} \delta_l = \frac{1}{2} \ln \sqrt{\frac{(a+d)^2 + (c-b)^2}{(a-d)^2 + (c+b)^2}}, \quad (29)$$

便可分别求出相移的实部和虚部. 从(28)、(29)式可得,当能量趋于无穷时,相移的实部和虚部分别趋于常数

$$\begin{aligned} \text{Re} \delta_l &\rightarrow -\frac{1}{2\hbar c} \int_0^{\infty} V_R(r) dr, \\ \text{Im} \delta_l &\rightarrow \frac{1}{2\hbar c} \int_0^{\infty} V_I(r) dr. \end{aligned} \quad (30)$$

当能量高而虚部又很小时( $k \gg m_1, m_2$ ;  $\left| \frac{V}{2k} \right| \ll 1$ ;  $|\omega_{i_0}^{\infty}| \ll 1$ ), 我们发现复位阱的相移

还原为

$$\operatorname{Re} \delta_l = \operatorname{tg}^{-1} \frac{-\sin \omega_{R_0}^\infty + (-1)^l \int_0^\infty dr R_1 \sin R_2}{\cos \omega_{R_0}^\infty - (-1)^l \int_0^\infty dr R_1 \cos R_2}, \quad (31)$$

$$e^{-2i\operatorname{Im} \delta_l} = \exp e^{2i\omega_{R_0}^\infty} \left\{ 1 + 2(-1)^l \int_0^\infty dr [2\omega_{R_0}^\infty R_1 \cos(2kr - 2\omega_{R_0}^\infty) - \theta_1 \sin(2kr - 2\omega_{R_0}^\infty)] \right\}. \quad (32)$$

(31) 和 (17) 在形式上完全一致。因此,当虚位阱小时,我们前面关于实相移的定性讨论仍然适用。

当虚位阱不太小时,为了估计其影响,我们选择不同强度的方虚位阱作了计算,其力程均取作 1.6 fm, 位阱实部均取上例第一组参数,结果如图 3:

图 3 是在  $V_I = 100 \text{ MeV}$  时计算的  $s$  波  $\operatorname{Im} \delta_0$  ( $\text{III}_s$ )。相应的薛定格方程的结果以  $\text{III}'_s$  表出。可以看出,  $\text{III}_s$  的行为与  $\operatorname{Re} \delta_l$  相似,趋于常数并且具有振荡;而  $\text{III}'_s$  则较平滑并且趋于零。

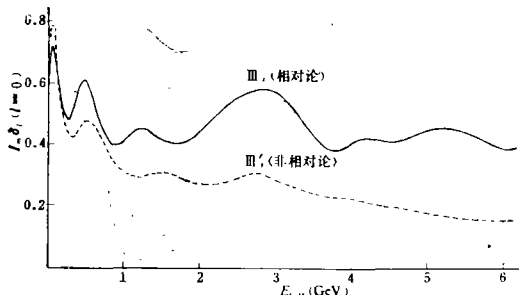


图 3

图 4 是不同  $V_I$  下的  $S$  波  $\operatorname{Im} \delta_0$ 。在 高能时,曲线的平均高度几乎与强度  $V_I$  成正比。当  $V_I = 200 \text{ MeV}$  时,一种周期为几百个  $\text{MeV}$  的振荡十分明显。这是虚位阱的陡的外缘引起的。因此,与实相移相似,  $\operatorname{Im} \delta_l$  有无振荡是虚位阱有无陡边的判据。实际情况

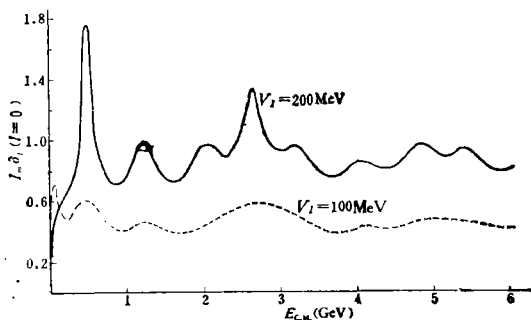


图 4

下,强度  $V_I$  随能量增加有缓慢的上升;相应地,  $\operatorname{Im} \delta_l$  曲线亦应缓慢上升。因而,观察曲线的上升率将有助于了解  $V_I$  对能量的依赖关系。在能量不十分高时,  $\operatorname{Im} \delta_l$  的变化比较激烈,对  $V_I$  的变化比较敏感,并且不同分波的低能  $\operatorname{Im} \delta_l$  差别也较大,图中并见有尖锐的峰。由于在低能时存在强烈的虚部是正反粒子系统的特点,因而若有可能进行例如  $P-\bar{P}$  系统的低能相移(实部和虚部)分析工作,

对研究正反粒子的相互作用是重要的。特别想指出,即使能量不高,相对论效应也有所表现。这由图 3 可以看到。

图 5 给出  $V_I = 0, 200 \text{ MeV}$  两种情况下  $S$  波相移的实部,两条曲线比较一致。在 高能时虚位阱的作用对  $\operatorname{Re} \delta_l$  仅表现为附加的小振荡,周期为几百个  $\text{MeV}$ 。由于目前高能实验资料不支持有一个强大的虚部(例如  $V_I \gg 200 \text{ MeV}$ )<sup>[6]</sup>,因此可以认为,虚位阱对高能  $\operatorname{Re} \delta_l$  的影响不大,  $\operatorname{Re} \delta_l$  本身足以提供对位阱实部的定性知识。在低能时,若存在比较大的虚部(如正反粒子系),它对  $\operatorname{Re} \delta_l$  的影响是比较大的。

至此,我们讨论了高能相移实部和虚部的一些性质及其与核力的关系。由于高能相

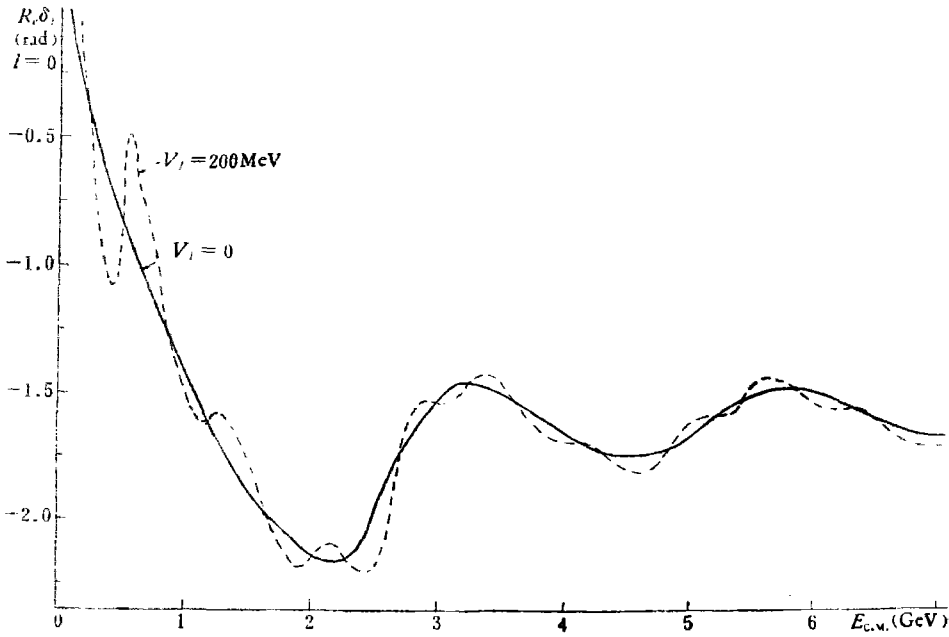


图 5

移分析存在的困难，这些讨论目前只是推进了原先建立在薛定格方程基础上的传统的势散射理论。但是另一方面，我们的确看到，文中所讨论的高能时相移的行为在几个 GeV 的能区就可能会有所反映。而就目前相移分析所达到的能区来看，相对论的修正也已不能忽略。

**附录 B-T 方程么正性的证明**

以下以  $m_1 = m_2$  为例证明 B-T 方程的么正性。此时

$$T\psi = \frac{1}{2} (E - V)\psi = \left( \sqrt{q^2 + m^2} - \frac{V}{2} \right) \psi.$$

$\psi$  中会有许多分波  $|\mathbf{k}\rangle$ 。假定  $k^2$  的变化范围是  $0 \rightarrow X^2$ ， $X$  是一个很大的数。则

$$T = \sqrt{-\nabla^2 + m^2} = \sqrt{-\nabla^2 - X^2 + X^2 + m^2} = \sqrt{X^2 + m^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{\nabla^2 + X^2}{X^2 + m^2}},$$

因  $|\nabla^2 + X^2|$  的变化范围是  $0 \rightarrow X^2$ ，上式可展成一个收敛的序列，得

$$T = \sqrt{X^2 + m^2} \cdot \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\nabla^2 + X^2}{X^2 + m^2} + \dots \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N B_n \left( \frac{\nabla^2 + X^2}{X^2 + m^2} \right)^n.$$

对于固定的  $N$ ，归并同类项后得

$$T = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N C_n(X, N) \nabla^{2n}.$$

以之代回 B-T 方程中，当  $V$  为实位阱时有：

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int d\mathbf{r} \left\{ \psi^* \sum_{n=0}^N C_n(X, N) \nabla^{2n} \psi \right\} - \text{h.c.} = 0.$$



对于  $\phi$  的某一分波解  $\phi_l = u(r)/r Y_{lm}(\Omega)$ , 当  $r$  大时

$$u(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} A e^{iqr} + B e^{-iqr}.$$

据此可证

$$\int d\mathbf{r} \phi_l^* \nabla^{2n} \phi_l - \text{h.c.} = 2in q (-q^2)^{n-1} (A^* A - B^* B).$$

由此得

$$(A^* A - B^* B) \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N n C_n(X, N) (-q^2)^{n-1} = 0.$$

上式对任意的  $q$  均成立, 故必有  $|A| = |B|$ , 么正性由此得证.

由于以上证明不依赖于  $X$  的大小, 因而作为一个近似证明, 只要  $X$  选得充分的大就能保证证明的精确度.

### 参 考 文 献

- [1] N. Hoshizaki, in "International Conference on Nuclear Structure—Contributed Papers", Tokyo-1977, 25;  
N. Hoshizaki, T. Kadata, *Prog. Theo. Phys.*, 57 (1977), 335; 1099;  
J. E. Simmons, in "High Energy Physics and Nuclear Structure—1975", 103.
- [2] P. A. M. Dirac, *Rev. Mod. Phys.*, 21 (1949) 392;  
B. Bakamjian, L. H. Thomas, *Phys. Rev.*, 92 (1953), 1300;  
L. L. Foldy, *Phys. Rev.*, 122 (1961), 275;  
F. Coester, P. Havas, *Phys. Rev.*, 14D (1976), 2556.
- [3] D. W. Rule, Y. Hahn, *Phys. Rev.*, 12C (1975), 1616.
- [4] 鲍诚光、赵维勤, 高能物理与核物理, 2 (1978), 336.
- [5] G. Schierholz, *Nucl. Phys.*, B7 (1968), 432; 483;  
F. Coester, *Phys. Rev.*, C11 (1975), 1; 1836;  
J. S. Kang, *Phys. Rev.*, D12 (1975), 841;  
N. D. Son, J. Sucher, *Phys. Rev.*, 153 (1967), 1496.
- [6] 赵维勤、鲍诚光, 高能物理与核物理, 3 (1979), 183.

## THE BEHAVIOR OF THE PHASE-SHIFT IN THE BAKAMJIAN-THOMAS THEORY

BAO CHENG-GUANG      ZHAO WEI-QIN

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)

### ABSTRACT

The behavior of the phase-shift of the Bakamjian-Thomas theory and its relation with the phenomenological nuclear force  $V = V_R - iV_I$  at high energy are explored. Two limits are obtained:

$$\text{Re} \delta_l \xrightarrow{E \rightarrow \infty} -\frac{1}{2\hbar c} \int_0^\infty V_R(r) dr, \quad \text{Im} \delta_l \xrightarrow{E \rightarrow \infty} \frac{1}{2\hbar c} \int_0^\infty V_I(r) dr.$$

It is found that the repulsive core with a sharp outer edge may induce a characteristic oscillation of  $\text{Re} \delta_l$ , and  $\text{Im} \delta_l$  is sensitive to  $V_I$ . The conclusion is that the analysis of the phase-shift extending to higher energy is relevant in determining the repulsive core and the imaginary part of the nuclear force.