第3卷 第3期 高能物理与核物理 Vol. 3, No. 3
1979年5月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS May, 1979

复合粒子量子场论中关于共轭场量和波函数的定义问题

阮图南 何祚庥 黄涛
（中国科学技术大学）（中国科学院理论物理研究所）（中国科学院高能物理研究所）

摘 要

本文讨论了复合粒子场论中如何定义共轭场量以及束缚态的相对论波函数的可能形式，还提出了同时解决这两个问题的可能途径.

在复合粒子量子场论理论中[1-3]，一个未能妥善解决的问题是如何定义复合粒子场量 $B(X,x)$ 的共轭场量？因为从 $B(X,x)$ 定义的展开系数 $C_k(T)$ 和 $d_k^*(T)$ 的渐近式分别是正粒子的消灭算符和反粒子产生算符，而相应的共轭算子原则上却必须从 $B(X,x)$ 的厄米共轭场量来定义，而这就产生同时存在编时算符和反编时算符等一系列复杂问题.

举例来说，在以正、反层子组成的介子体系的复合粒子场论中，复合粒子场量的定义是

$$B(X,x)=N(\Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_2))\equiv T(\Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_2))-\langle 0|T(\Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_2))|0\rangle \quad (1)$$

（由于不影响所讨论问题的实质，下面将略去式(1)中的真空平均值项）. 对 $B(X,x)$ 取厄米共轭就有

$$\gamma_4(B(X,x))^+\gamma_4=\theta(x_1-x_2)(\Psi(x_2)\bar{\Psi}(x_1))-\theta(x_2-x_1)(\Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_2)), \quad (2)$$

这是一个反编时乘积. 实际上，在复合粒子场论里，相应的共轭场量并没有取(2)式，而是取

$$\bar{B}(X,x)=T(\Psi(x_2)\bar{\Psi}(x_1)), \quad (3)$$

式(2)和式(3)两者相差的数值是

$$\begin{aligned}T(\Psi(x_2)\bar{\Psi}(x_1))-\gamma_4(T(\Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_2)))^\dagger\gamma_4&=\theta(t_2-t_1)\{\Psi(x_2),\bar{\Psi}(x_1)\}\\-\theta(t_1-t_2)\{\Psi(x_2),\bar{\Psi}(x_1)\}&=\varepsilon(t_2-t_1)\{\Psi(x_2),\bar{\Psi}(x_1)\},\end{aligned} \quad (4)$$

即相差一个反对易子. 由于存在着微观因果律，这两者类空间隔上是完全等价的，而在类时间隔上却很不相同！这就产生一个问题，在复合粒子场论中用式(3)定义的共轭场量能否保证粒子和反粒子的厄米共轭性质？

在复合粒子场论中，正粒子的渐近条件可定义为

$$\lim_{T\to\mp\infty}C_i^\zeta(\mathbf{P},T)=C_i^{\zeta\,\substack{\mathrm{in}\\\mathrm{out}}}(\mathbf{P}), \quad (5)$$

其中

本文1978年1月17日收到.

$$C_i^{\zeta}(\mathbf{P}, T) = i\int d^3X d^4x \bar{\chi}_{\mathbf{P}}(X, x) Q \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial X_0} T(\Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_2)). \tag{6}$$

反粒子的渐近条件是

$$\lim_{T\to\mp\infty} d_i^{\zeta*}(\mathbf{P}, T) = d_i^{\zeta*\substack{\text{in}\\\text{out}}}(\mathbf{P}), \tag{7}$$

而

$$d_i^{\zeta*}(\mathbf{P}, T) = i\int d^3X d^4x T(\Psi(x_2)\bar{\Psi}(x_1)) \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial X_0} Q\chi_{\mathbf{P}}(X, x) \tag{8}$$

对于自轭场应有

$$[C_i^{\zeta}(\mathbf{P}, T)]^{\dagger} = d_i^{\zeta*}(\mathbf{P}, T), \tag{9}$$

可是由式 (6) 和式 (8)，很难说式 (9) 一定成立，因而也不能证明有

$$[C_i^{\zeta\substack{\text{in}\\\text{out}}}(\mathbf{P})]^{\dagger} = d_{\zeta}^{i*\substack{\text{in}\\\text{out}}}(\mathbf{P}). \tag{10}$$

这就产生一个尖锐的问题，例如，对于 π^0 介子就没有下列等式成立

$$[\langle\pi^0|]^{\dagger} = |\pi^0\rangle!, \tag{11}$$

在以前的工作中[3]，$C_i^{\zeta\text{in}*}(\mathbf{P})$ 和 $d_i^{\zeta\text{in}*}(\mathbf{P})$ 算子间的等价性是由如下的对易子

$$\begin{aligned}[P_\mu, C_i^{\zeta\text{in}*}(\mathbf{P})] &= P_\mu C_i^{\zeta\text{in}*}(\mathbf{P}),\\ [p_\mu, d_i^{\zeta\text{in}*}(\mathbf{P})] &= P_\mu d_i^{\zeta\text{in}*}(\mathbf{P}),\end{aligned} \tag{12}$$

来建立的．既然 $C_i^{\zeta\text{in}*}(\mathbf{P})$ 和 $d_i^{\zeta\text{in}*}(\mathbf{P})$ 满足同样的对易关系式且有相同量子数，因而在物理上可以认为 $C_i^{\zeta\text{in}}(\mathbf{P})$ 的厄米共轭算符可以用 $d_i^{\zeta\text{in}*}(\mathbf{P})$ 来代替，从而避免了在格林函数的真空平均值中使用反编时乘积的复杂性．但这一替代只是从物理上等价角度的一种猜测，不是数学上的严密证明．

注意到场算符 $T(\Psi(x_2)\bar{\Psi}(x_1))$ 和厄米共轭算符 $\gamma_4(T(\Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_2)))^{\dagger}\gamma_4$ 间虽然有差别，但在类空间隔上却完全相同．再改虑到复合粒子场论渐近条件的定义在选择归一化的共轭波函数上有一定的任意性，即人们可以选择任一函数 $W(p, x)$[4] 满足

$$\begin{aligned}\int d^4x \bar{W}(\mathbf{P}, x)\chi_{\mathbf{p}}(x) &= 1,\\ \int d^4x \bar{\chi}_{\mathbf{p}}(x) W(\mathbf{P}, x) &= 1,\end{aligned} \tag{13}$$

的条件，都可用来代替式 (6) 和 (8) 中的 $\bar{\chi}_{\mathbf{P}}(x)Q$ 和 $Q\chi_{\mathbf{p}}(x)$．如果令 $W(\mathbf{P}, x)$, $\bar{W}(\mathbf{P}, x)$ 中包含有 $\theta(-x^2)$ 的因子，即在类时间隔下等于零．那么就将有式 (9) 和 (10) 以及式 (11)．如果人们仍选择式 (6) 和 (8) 作为 $C_i^{\zeta}(\mathbf{P}, T)$ 和 $d_i^{\zeta*}(\mathbf{P}, T)$ 的定义，这不过意味着由 $W(\mathbf{P}, x)$ 和 $\bar{W}(\mathbf{P}, x)$ 函数所定义的 $d_i'^{\zeta*}(\mathbf{P}, T)$ 和 $C_i'^{\zeta}(\mathbf{P}, T)$ 应换成为不带“′”的算子，但“入”算子的等式，即式 (10) 仍是成立的．这是因为 L-S-Z 场论以及复合粒子场论在“入”算子或“出”算子确定了的情况下，其插入场算子仍可以有一定的任意性[2,3]，因而在实际计算中将完全能用 (8) 式，而不致引起任何理论上的不自洽性．

其实，这一理论上的任意性是和量子力学波函数在向相对论推广时也存在一定任意性的情况相联系的．通常薛定格表象中的波函数可定义为

$$\chi_{\mathbf{k}E}^{\zeta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) = \langle 0|\Psi(\mathbf{x}_1, t)\bar{\Psi}(\mathbf{x}_2, t)|\mathbf{k}, E, \zeta\rangle, \tag{14}$$

这一表达式向相对论推广有很多可能性，Bethe-Salpeter 波函数是其中的一种形式．因为

从非相对论物理观念出发，空间两点上同时存在的两个粒子，才有可能组成束缚态．利用相对论语言是：类空间隔上的两个粒子才有可能组成束缚态．因此对薛定格波函数的最简单的推广应是

$$B_s(x_1, x_2) = \theta(x^2)\psi(x_1)\bar{\phi}(x_2) \quad x = x_1 - x_2, \tag{15}$$

根据微观因果律

$$\{\psi(x_1), \bar{\phi}(x_2)\} = 0 \quad 当\ (x_1 - x_2)^2 > 0, \tag{16}$$

那么式 (15) 可以改写为下述形式：

$$B_s(x_1, x_2) = \theta(x^2)\frac{1}{2}[\psi(x_1), \bar{\phi}(x_2)], \tag{17}$$

由 $B_s(x_1, x_2)$ 定义了双粒子波函数 $\langle 0|B_s(x_1, x_2)|\mathbf{k}\zeta\rangle$．任何其它类型的波函数在类空条件下必须还原为由式 (15) 或 (17) 所定义的波函数．

这样，我们只能在 $B_s(x_1, x_2)$ 上加上类空条件下为零的项，即类时、类光的项，即

$$\theta(-x^2 + \varepsilon)\frac{1}{2}[\psi(x_1), \bar{\phi}(x_2)],$$

和

$$\frac{1}{2}\{\psi(x_1), \bar{\phi}(x_2)\},$$

其中 ε 是一个无穷小的正数，即

$$\theta(-x^2 + \varepsilon) = \begin{cases} 0 & 当\ x^2 > 0 \\ 1 & 当\ x^2 \leqslant 0 \end{cases}, \tag{18}$$

因此，一般地有

$$B(x_1, x_2) = \theta(x^2)\frac{1}{2}[\psi(x_1), \bar{\phi}(x_2)] + A(x)\theta(-x^2 + \varepsilon)\frac{1}{2}[\psi(x_1), \bar{\phi}(x_2)] + B(x)\frac{1}{2}\{\psi(x_1), \bar{\phi}(x_2)\}, \tag{19}$$

其中 $A(x)$、$B(x)$ 是两个标量函数，为了保持平移不变性，$A(x)$ 和 $B(x)$ 必须是坐标差 $x = x_1 - x_2$ 的函数．为了保持式 (19) 的第二、三项的正洛仑兹协变性与第一项相同，$A(x)$、$B(x)$ 还必须是正洛仑兹不变函数．考虑到由 x 组成的正洛仑兹不变量只有 x^2 和时间赝标量 $\varepsilon(t)\theta(-x^2 + \varepsilon)$，所以

$$\begin{aligned} A(x) &= a(x^2) + b(x^2)\,\varepsilon(t)\theta(-x^2 + \varepsilon), \\ B(x) &= C(x^2) + d(x^2)\,\varepsilon(t)\theta(-x^2 + \varepsilon), \end{aligned} \tag{20}$$

将式 (20) 代入式 (19) 得到

$$B(x_1, x_2) = \theta(x^2)\frac{1}{2}[\psi(x_1), \bar{\phi}(x_2)] + (a + b\varepsilon(t))\,\theta(-x^2 + \varepsilon)\frac{1}{2}[\psi(x_1), \bar{\phi}(x_2)] + (c + d\varepsilon(t))\frac{1}{2}\{\psi x_1), \bar{\phi}(x_2)\}, \tag{21}$$

其中 a, b, c, d 只是 x^2 的任意函数．式 (21) 是定义波函数的最一般的双粒子算符形式．

显然，从式 (21) 是不能得到推迟、超前形式的波函数，但是可以得到编时波函数和反

编时波函数，比如令

$$a = 1, \quad b = c = 0,$$

且取 $d = 1, -1, 0$ 将分别相应于三种不同的特殊情形：

$$\begin{aligned} B_+(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}[\psi(x_1), \bar{\psi}(x_2)] + \varepsilon(t)\frac{1}{2}\{\psi(x_1), \bar{\psi}(x_2)\} \\ &= \theta(t)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2) - \theta(-t)\bar{\psi}(x_2)\psi(x_1) \\ &= T(\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)), \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} B_-(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}[\psi(x_1), \bar{\psi}(x_2)] - \varepsilon(t)\frac{1}{2}\{\psi(x_1), \bar{\psi}(x_2)\} \\ &= \theta(-t)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2) - \theta(t)\bar{\psi}(x_2)\psi(x_1) \\ &= \tilde{T}(\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)), \end{aligned} \tag{23}$$

$$B_0(x_1, x_2) = \frac{1}{2}[\psi(x_1), \bar{\psi}(x_2)], \tag{24}$$

式 (22) 是编时算符，由此定义的波函数正是 Bethe-Salpeter 波函数，式 (23) 是反编时算符. 由式 (22)—(24)还可以导出：

$$\bar{B}_+(x_1, x_2) \equiv \gamma_4 B_+^\dagger(x_1, x_2)\gamma_4 = B_-(x_2, x_1), \tag{25}$$

$$\bar{B}_-(x_1, x_2) \equiv \gamma_4 B_-^\dagger(x_1, x_2)\gamma_4 = B_+(x_2, x_1), \tag{26}$$

$$\bar{B}_0(x_1, x_2) \equiv \gamma_4 B_s^\dagger(x_1, x_2)\gamma_4 = B_s(x_2, x_1), \tag{27}$$

式(22)—(24) 所定义的三种形式在类空间隔上都与式(15)或式(17)一致，也将和式 (14) 一致.

把这几种相对论协变的波函数相互比较一下，其区别仅在于类时部分，其类空部分，均和式(14) 所定义的波函数相一致. 其实即使仅应用 (14) 式也仍然可以是相对论协变的.如果令复合粒子波函数在质心系中取(14)式，将完全可能通过相对论的"推动"(Boost) 而协变化，因而即仅取式 (14) 形式的波函数，也仍然可建立起和量子场论相一致的相对论的二体方程式. 近年来，在国外发展起来的"准势"方程式[5] 就是基于式 (14) 的波函数的定义.

由于式 (14) 以及其它可能的相对论协变波函数间仅差一个类时部分，但在类空间隔上均相等. 再注意到式 (9)—(11) 的证明仅要求有相同的类空波函数，因此，人们将能期待在"准势"方程式以及其它相对论二体方程式的基础上建立起类似的复合粒子场论，且完全可以沿用文献 [1—3] 中的方法. 尤其是"准势"方程将能不借助于特殊的 $W(P, x)$ 的波函数就能自动地避免复合粒子场论选择共轭场量上的困难，因为从式 (15) 或式 (17) 可见

$$\bar{B}_s(x_1, x_2) \equiv \gamma_4 B_s^\dagger(x_1, x_2)\gamma_4 = B_s(x_2, x_1) \tag{28}$$

将式 (28) 代入到式 (6) 和 (8) 就很容易证明式 (9) 和式 (10) 是成立的.

参　考　文　献

[1] 何祚庥、黄涛，科学通报，**19**，(1974)，1.
[2] 何祚庥、黄涛，"Scientia Sinica"，**18** (1975)，502.
[3] 何祚庥、黄涛，物理学报，**23** (1974)，264.

[4] 何祚庥、黄涛，科学通报，**20** (1975), 419.
[5] A. A. Logunov, A. N. Tavkhelidze, Nouro Cimento, **29** (1963), 380.

ON THE CONJUGATE FIELD QUANTITY AND THE DEFINITION OF THE RELATIVISTIC WAVE FUNCTION IN THE COMPOSITE FIELD THEORY

RUAN TU-NAN
(*University of Science and Technology of China*)
HE ZUO-XIU
(*Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica*)
HUANG TAO
(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

The definition of the conjugate field quantities in the composite field theory and the possible forms of the relativistic wave functions of the bound state are discussed. Possible ways to solve these two problems simultaneously are suggested.