第3卷 第2期 高能物理与核物理 Vol. 3, No. 2
1979年3月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS March, 1979

SU_n 群 CG 系数的一个递推公式

陈金全 于祖荣 王 凡
（南京大学物理系）

摘 要

本文证明了，如果采用 Gelfand-Biedenharn 位相约定，则任一 SU_n 群的单态因子 (SF) 必可分为可导的 $(SU_nSF)_d$ 和不可导的 (SU_rSF) 两类，并且 $(SU_nSF)_d=(SU_rSF)$，$n=r+1, r+2, \cdots$. 从而把任一 SU_n 群 C-G 系数的计算归结为少数不可导因子 (SU_rSF) 的计算.

一

文献 [1] 提出了一种新的计算 SU_n 群 C-G (Clebsch-Gordan) 系数的方法，这种方法可以同时求得固定$[\nu_1]$, $[\nu_2]$, $[\nu]$ 的所有 SU_n 群的 C-G 系数 $C^{[\nu]\gamma}_{[\nu_1]\alpha,[\nu_2]\beta}$ (α, β, γ 为其它量子数). 这样不但解决了高维酉群 C-G 系数的计算困难，而且也给列表带来了极大的方便. 用一个表格就能同时列出无穷多个同类型的 C-G 系数. 常用的另一种计算 CG 系数的方法[2,3]是从 SU_n 群最高权态出发，利用递降算符 $E_{i,i-1}$ 作用，求出 CG 系数. 这种方法对每种 n 都要重新计算一次 C-G 系数. 由于 n 增大时，计算 Gelfand 矩阵元[4]的困难迅速增加，因此它较适合于低维酉群 C-G 系数的计算.

本文吸取前一种方法[1]的部份优点，给出一个简单的递推公式，使得从 SU_n 群单态因子 (SU_nSF) 可直接推得 SU_{n+1} 群的大部份单态因子，这样每次增加 n 时，只需计算那些不能从 (SU_nSF) 推出的部份. 对于那些可以从 (SU_nSF) 推出的因子，不但不必计算，也毋需另外列表，可直接从 (SU_nSF) 表中读得.

二

令:

$$\left|\begin{pmatrix}[\nu]\\(m)\end{pmatrix}\right\rangle=\left|\begin{pmatrix}m_{1n}\cdots m_{nn}\\ \cdots\\ m_{12}m_{22}\\ m_{11}\end{pmatrix}\right\rangle \tag{1}$$

为 SU_n 群 Gelfand 基[4], $[\nu]=[m_{in}]\equiv[m_{1n}m_{2n}\cdots m_{nn}]$; $\left|\begin{pmatrix}[\nu]\\(\bar{m})\end{pmatrix}\right\rangle_d$ 为 SU_{n+1} 群的一种

本文 1977 年 11 月 5 日收到.

特殊的 Gelfand 基，称为导出基，它的 Gelfand 符号和 SU_n 的 Gelfand 符号（1）式有以下简单关系：

$$\bar{m}_{ij} = m_{i,j-1}, \quad j = n+1, n, \cdots 2; \quad i = 1, 2, \cdots j-1$$
$$\bar{m}_{ii} = 0, \quad i = n+1, n, \cdots 2, 1, \tag{2}$$

在 Gelfand-Biedenharn[4] 位相约定下（即规定 $E_{k,k-1}$ 的矩阵元全都大于等于零），由 $E_{k,k-1}$ 的矩阵元公式[4]容易证明：

$$E_{k+1,k}\left|\begin{pmatrix}[\nu]\\(\bar{m})\end{pmatrix}\right\rangle_d = E_{k,k-1}\left|\begin{pmatrix}[\nu]\\(m)\end{pmatrix}\right\rangle, \quad k=n, n-1, \cdots 2 \tag{3a}$$

由此可立即证明 SU_{n+1} 群这种导出基的 CG 系数（以下简称为可导 CG 系数）和 SU_n CG 系数相等

$$\left\langle\begin{pmatrix}[\nu_3]\\(\bar{m}^{(3)})\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}[\nu_1]\\(\bar{m}^{(1)})\end{pmatrix},\begin{pmatrix}[\nu_2]\\(\bar{m}^{(2)})\end{pmatrix}\right\rangle = \left\langle\begin{pmatrix}[\nu_3]\\(m^{(3)})\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}[\nu_1]\\(m^{(1)})\end{pmatrix},\begin{pmatrix}[\nu_2]\\(m^{(2)})\end{pmatrix}\right\rangle. \tag{3b}$$

如果以标准 Weyl 盘来标志 Gelfand 基[5]，则（3）式更是显见的. 现以 $n=3$ 为例说明如下：

$$\text{Gelfand 标志}\left\langle\begin{pmatrix}3\ 2\ 1\ 0\\3\ 1\ 0\\3\ 0\\0\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}2\ 1\ 0\ 0\\1\ 0\ 0\\1\ 0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\ 1\ 0\ 0\\2\ 1\ 0\\2\ 0\\0\end{pmatrix}\right\rangle$$
$$=\left\langle\begin{pmatrix}3\ 2\ 1\\3\ 1\\3\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}2\ 1\ 0\\1\ 0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\ 1\ 0\\2\ 1\\2\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\text{Weyl 盘标志}\left\langle\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&2&2\\\hline 3&4\\\cline{1-2} 4\\\cline{1-1}\end{array}\middle|\begin{array}{|c|c|}\hline 2&4\\\hline 4\\\cline{1-1}\end{array}\ \begin{array}{|c|c|}\hline 2&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\right\rangle = \left\langle\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&1\\\hline 2&3\\\cline{1-2} 3\\\cline{1-1}\end{array}\middle|\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\right\rangle. \tag{4}$$

根据 Racah 引理[6]，SU_n 的 CG 系数可分解成一串 SF（单态因子）之积：

$$(SU_nCGC) = (SU_{n-1}SF)(SU_{n-2}SF)\cdots(SU_{2c}SF)(SU_2CGC), \tag{5}$$

$(SU_{n-1}SF)$ 又称为 $SU_n \supset SU_{n-1} \times U_1$ isoscalar factor，它可表为：

$$(SU_{n-1}SF) = \left(\begin{matrix}[\nu_3]\\ [\nu_3']A_3(n)\end{matrix}\middle|\begin{matrix}[\nu_1] & [\nu_2]\\ [\nu_1']A_1(n), & [\nu_2']A_2(n)\end{matrix}\right)$$
$$[\nu_j] = [m_{1n}^{(j)}\cdots m_{nn}^{(j)}], \quad [\nu_j'] = [m_{1n-1}^{(j)}\cdots m_{n-1,n-1}^{(j)}], \quad j = 1, 2, 3 \tag{6}$$

这里 $A_j(n)$ 为可加（Additive）量子数

$$A_j(n) = \sum_{i=1}^{n-1} m_{i,n-1}^{(j)} - \frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{in}^{(j)}, \tag{7}$$

例如：

$$A(2) = I_Z, \quad A(3) = Y, \quad A(4) = Z \tag{8}$$

这里 I_Z 为同位旋 Z 分量，Y 为超荷，Z 为文 [3] 定义的量子数.

下面证明 SU_n 群可导 CG 系数所对应的 $(SU_{n-1}SF)$ [记为 $(SU_{n-1}SF)_d$] 就等于一个 $(SU_{n-2}SF)$，即

$$\begin{pmatrix} [\nu_3] & [\nu_1] & [\nu_2] \\ [\nu_3']A_3(n) & [\nu_1']A_1(n), & [\nu_2']A_2(n) \end{pmatrix}_d$$

$$= \begin{pmatrix} [\nu_3] & [\nu_1] & [\nu_2] \\ [\nu_3']A_3(n-1) & [\nu_1']A_1(n-1), & [\nu_2']A_2(n-1) \end{pmatrix}, \tag{9a}$$

简写成:

$$(SU_{n-1}SF)_d = (SU_{n-2}SF), \tag{9b}$$

关于如何判断一个$(SU_{n-1}SF)$是否可导,将由后面图形规则给出. 为了叙述方便,我们定义$(SU_1SF) \equiv (SU_2CGC)$,即

$$\begin{pmatrix} [\nu_3] & [\nu_1] & [\nu_2] \\ [\nu_3']A_3(2) & [\nu_1']A_1(2), & [\nu_2']A_2(2) \end{pmatrix} \equiv C^{I_3I_{3z}}_{I_1I_{1z},I_2I_{2z}}$$

$$[\nu_j] = [m_{12}^{(j)}m_{22}^{(j)}], [\nu_j'] = [m_{11}^{(j)}], \tag{10}$$

$$I_j = \frac{1}{2}(m_{12}^{(j)} - m_{22}^{(j)}), \quad I_{jz} = A_j(2) = m_{11}^{(j)} - \frac{1}{2}(m_{12}^{(j)} + m_{22}^{(j)}).$$

首先证明(9)式对$n=3$成立. 根据(3b)式有

$$\left\langle \begin{pmatrix} m_{12}^{(3)} & m_{22}^{(3)} & 0 \\ & m_{11}^{(3)} \quad 0 & \\ & 0 & \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} m_{12}^{(1)} & m_{22}^{(1)} & 0 \\ & m_{11}^{(1)} \quad 0 & \\ & 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{12}^{(2)} & m_{22}^{(2)} & 0 \\ & m_{11}^{(2)} \quad 0 & \\ & 0 & \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} m_{12}^{(3)} & m_{22}^{(3)} \\ & m_{11}^{(3)} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} m_{12}^{(1)} & m_{22}^{(1)} \\ & m_{11}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{12}^{(2)} & m_{22}^{(2)} \\ & m_{11}^{(2)} \end{pmatrix} \right\rangle, \tag{11}$$

由(5),(6),(11)式得

$$\begin{pmatrix} [\nu_3] & [\nu_1] & [\nu_2] \\ [\nu_3']A_3(3) & [\nu_1']A_1(3), & [\nu_2']A_2(3) \end{pmatrix} C^{\bar{I}_3\bar{I}_{3z}}_{\bar{I}_1\bar{I}_{1z},\bar{I}_2\bar{I}_{2z}} = C^{I_3I_{3z}}_{I_1I_{1z},I_2I_{2z}}, \tag{12a}$$

$$\bar{I}_j = \frac{1}{2}(\bar{m}_{12}^{(j)} - \bar{m}_{22}^{(j)}) = \frac{1}{2}m_{11}^{(j)}, \tag{12b}$$

$$\bar{I}_{jz} = \bar{m}_{11}^{(j)} - \frac{1}{2}(\bar{m}_{12}^{(j)} + \bar{m}_{22}^{(j)}) = -\frac{1}{2}m_{11}^{(j)}, \tag{12c}$$

$$m_{11}^{(3)} = m_{11}^{(1)} + m_{11}^{(2)} \tag{12d}$$

由(12b),(12c),(12d)可知,(12a)式左边的SU_2CG系数为最低权(LW)CG系数

$$(SU_2CGC)_{\rm LW} = C^{\bar{I}_3\bar{I}_{3z}}_{\bar{I}_1\bar{I}_{1z},\bar{I}_2\bar{I}_{2z}} = C^{\bar{I}_1+\bar{I}_2,-(\bar{I}_1+\bar{I}_2)}_{\bar{I}_1-\bar{I}_1,\bar{I}_2-\bar{I}_2} = C^{\bar{I}_1+\bar{I}_2,\bar{I}_1+\bar{I}_2}_{\bar{I}_1\bar{I}_1,\bar{I}_2\bar{I}_2} = 1, \tag{13}$$

由(12a),(13)式立即得到

$$\begin{pmatrix} [\nu_3] & [\nu_1] & [\nu_2] \\ [\nu_3']A_3(3) & [\nu_1']A_1(3), & [\nu_2']A_2(3) \end{pmatrix}_d = C^{I_3I_{3z}}_{I_1I_{1z},I_2I_{2z}}$$

$$A_j(3) = m_{11}^{(j)} - \frac{2}{3}(m_{12}^{(j)} + m_{22}^{(j)}), \quad j = 1, 2, 3, \tag{14a}$$

其余量子数$[\nu_j]$,$[\nu_j']$,I_j,I_{jz}的表达式见(10)式. (14a)式就是(9)式$n=3$时的特殊情形,我们把它简写为:

$$(SU_2SF)_d = (SU_1SF) \equiv (SU_2CGC), \tag{14b}$$

现在利用归纳法证明(9)式对任意n均成立. 假定(9)式对$n=m$已成立,即

$$(SU_kSF)_d = (SU_{k-1}SF),\quad k = m-1,\ m-2,\ \cdots 2, \tag{15}$$

根据可导 CG 系数定义有

$$\begin{aligned}(SU_{m+1}CGC)_d &= (SU_mSF)_d(SU_{m-1}SF)_d\cdots(SU_3SF)_d(SU_2SF)_d(SU_2CGC)_{LW}\\ &= (SU_mCGC) = (SU_{m-1}SF)(SU_{m-2}SF)\cdots(SU_2SF)(SU_2CGC),\end{aligned} \tag{16}$$

由 (13), (15) 式立即得到

$$(SU_mSF)_d = (SU_{m-1}SF), \tag{9c}$$

上述结果可用图形规则直观地表示出来．先用这样一种图形来代表量子数集

$$\begin{pmatrix} & [\nu] \\ [\nu'] & A(n)\end{pmatrix}:$$

在和配分 $[\nu]$ 相对应的杨图上，标出第 n 号态占据的方格，而和配分 $[\nu']$ 相对应的方格不作任何记号，例如：

$$\begin{pmatrix} & [321] \\ [31] & A(n)\end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{ytableau} \, & \, & \, \\ \, & n \\ n \end{ytableau}\right) \tag{17}$$

$$A(n) = \frac{1}{n}(\text{白方格数}) - \frac{n-1}{n}(n\ \text{占据的方格数})$$

这样 $(SU_{n-1}SF)$ 就可用图形表示，例如：

$$\left(\begin{matrix} & [321] \\ [31] & A_3(n)\end{matrix}\middle|\begin{matrix} & [21] \\ [11] & A_1(n),\end{matrix}\ \begin{matrix} & [21] \\ [2] & A_2(n)\end{matrix}\right) = \left(\begin{ytableau} \, & \, & \, \\ \, & n \\ n \end{ytableau}\ \middle|\ \begin{ytableau} \, & n \\ \, \end{ytableau}\ \begin{ytableau} \, & \, \\ n \end{ytableau}\right), \tag{18}$$

利用图形可将 (16) 式表达得更直观，例如：

$$\begin{aligned}&\left\langle \begin{ytableau} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 \end{ytableau}\ \middle|\ \begin{ytableau} 2 & 4 \\ 3 \end{ytableau}\ \begin{ytableau} 2 & 2 \\ 4 \end{ytableau}\right\rangle = \left(\begin{ytableau} \, & \, & \, \\ \, & 4 \\ 4 \end{ytableau}\ \middle|\ \begin{ytableau} \, & 4 \\ \, \end{ytableau}\ \begin{ytableau} \, & \, \\ 4 \end{ytableau}\right)\left(\begin{ytableau} \, & \, & \, \\ 3 \end{ytableau}\ \middle|\ \begin{ytableau} \, \\ 3 \end{ytableau}\ \begin{ytableau} \, & \, \end{ytableau}\right)\\ &\quad\cdot\left(\begin{ytableau} 2 & 2 & 2 \end{ytableau}\ \middle|\ \begin{ytableau} 2 \end{ytableau}\ \begin{ytableau} 2 & 2 \end{ytableau}\right)\\ &= \left\langle \begin{ytableau} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 \end{ytableau}\ \middle|\ \begin{ytableau} 1 & 3 \\ 2 \end{ytableau}\ \begin{ytableau} 1 & 1 \\ 3 \end{ytableau}\right\rangle = \left(\begin{ytableau} \, & \, & \, \\ \, & 3 \\ 3 \end{ytableau}\ \middle|\ \begin{ytableau} \, & 3 \\ \, \end{ytableau}\ \begin{ytableau} \, & \, \\ 3 \end{ytableau}\right)\left(\begin{ytableau} 1 & 1 & 1 \\ 2 \end{ytableau}\ \middle|\ \begin{ytableau} 1 \\ 2 \end{ytableau}\ \begin{ytableau} 1 & 1 \end{ytableau}\right)\end{aligned} \tag{19}$$

事实上图形 (17) 代表一类 IR 基，

$$\left|\begin{ytableau} \, & \, & \, \\ \, & n \\ n \end{ytableau}\right\rangle = \left|\begin{matrix} & [\nu] \\ [\nu'] & A(n)\Gamma\end{matrix}\right\rangle, \tag{20}$$

它们同属于 SU_n 的 IR $[\nu]=[321]$ 和 SU_{n-1} 的 IR $[\nu']=[31]$ 和 U_1 的 IR $A(n)$，而其余量子数 Γ 则不同．

如何判断一个 (SU_nSF) 是可导的还是不可导的（即能不能从 $r \leqslant n-1$ 的 (SU_rSF) 导出），这可以从基 $\left|\begin{matrix} & [\nu_3] \\ [\nu_3'] & A_3(n)\Gamma_3\end{matrix}\right\rangle$ 来判断．若 $[\nu_3'] = [f_1f_2\cdots f_r]$，$f_r \neq 0$，则 (SU_rSF) 为不可导，

$$(SU_rSF)=\left(\begin{array}{c|cc}[\nu_3] & [\nu_1] & [\nu_2]\\ [\nu_3']A_3(r+1) & [\nu_1']A_1(r+1), & [\nu_2']A_2(r+1)\end{array}\right), \qquad (21)$$

而其余所有 $n>r$ 的 $(SU_nSF)_d$ 均可从 (SU_rSF) 导出. 这也可以根据图形来判断：称 $[\nu_3']$ 所对应的杨图(即(20)式中由白方块所组成的杨图)为骨架，若骨架的行数为 T，则 (SU_rSF) 为不可导. 这是因为 SU_r 群的 IR 所对应的杨图最多只能有 r 行，而且第 r 行一定填充指标 r，去掉 r 所占据的方块后的骨架最多只能有 $r-1$ 行，因此只有在 SU_m 群 $(m\geqslant r+1)$ 的 IR 基(因而其 $SU_{m-1}SF$)中才能出现 r 行骨架.

因此(9a)式可以改写成

$$\left(\begin{array}{c|cc}[\nu_3] & [\nu_1] & [\nu_2]\\ [\nu_3']A_3(n+1) & [\nu_1']A_1(n+1), & [\nu_2']A_2(n+1)\end{array}\right)$$

$$=\left(\begin{array}{c|cc}[\nu_3] & [\nu_1] & [\nu_2]\\ [\nu_3']A_3(r+1) & [\nu_1']A_1(r+1), & [\nu_2']A_2(r+1)\end{array}\right), \qquad (22a)$$

$$[\nu_3']=[f_1f_2\cdots f_r],\quad f_r\neq 0,\quad n=r+1,r+2,\cdots$$

或者写成

$$(SU_nSF)_d=(SU_rSF),\ n=r+1,\ r+2,\ \cdots, \qquad (22b)$$

由此可见，计算了一个不可导因子 (SU_rSF)，也就给出了无穷多个单态因子

$$(SU_nSF)_d,\quad n=r+1,\ r+2,\ \cdots.$$

附带指出，导出基(2)式的定义仅仅是为了导出(22)式. 但(22)式的应用范围却要宽得多. 例如

$$\left\|\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&1\\\hline 2&4\\\cline{1-2} 4\\\cline{1-1}\end{array}\right\rangle,\ \left\|\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&2\\\hline 2&4\\\cline{1-2} 4\\\cline{1-1}\end{array}\right\rangle,\ \left\|\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&2\\\hline 3&4\\\cline{1-2} 4\\\cline{1-1}\end{array}\right\rangle,\ \left\|\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 3&4\\\cline{1-2} 4\\\cline{1-1}\end{array}\right\rangle,\ \cdots$$

这些非导出基的 SU_3SF 都是可导的，而且就等于导出基

$$\left\|\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&2&2\\\hline 3&4\\\cline{1-2} 4\\\cline{1-1}\end{array}\right\rangle$$

的 SU_3SF.

三

以前对 SU_nSF 是一个 n 一个 n 地算的，列表也是一个 n 一个 n 地列的. 现在既然已找到了关系式(22)，自然会想到对列表方式也进行改革，使得一个 SF 表同时就代表无穷多个 SF 表. 利用图形规则(17)，(18)式，按图形列表，就可达到这一目的.

Haacke 等[3]采用 Gelfand-Biedenharn 位相[4]，计算了 SU_2 和 SU_3 的 SF，下面就以他们的结果(文献[3]表 II，IV)为例说明(22)式的应用，介绍图形列表法，并顺便指出文献[3]中在位相上存在的一些错误.

表 1，2 是按图形排列的，同一个表可给出所有 $n\geqslant r$ 的 (SU_nSF)，表上同时列出了 $n=1,2,3$ 时该图形所对应的量子数，如

表 1 [3]×[3] 的 SU_mSF ($m = n - 1$)

1.1

SU_2CGC	SU_2SF	SU_3SF		□□□□ / $n\,n$ 1 (27) $\underline{126}$	□□□□$n\,n$ 3 (28) $\underline{84''}$	□□□□n / n 2 (35) $\underline{140}$
1	5, 0	(15') $-\frac{1}{2}$				
$\frac{3}{2}\ -\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\ \frac{3}{2}$	2, −1; 4, 1	$(3)-\frac{5}{4}$, $(10)\frac{3}{4}$	□$n\,n$ □□□	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$
$\frac{3}{2}\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\ \frac{1}{2}$	3, 0; 3, 0	$(6)-\frac{1}{4}$, $(6)-\frac{1}{4}$	□□n □□n	$-\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	0
$\frac{3}{2}\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\ -\frac{1}{2}$	4, 1; 2, −1	$(10)\frac{3}{4}$, $(3)-\frac{5}{4}$	□□□ □$n\,n$	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$

1.2

SU_2CGC	SU_2SF	SU_3SF		□□$n\,n$ / $n\,n$ 1 (27) $\underline{126}$	□□$n\,n\,n\,n$ 3 (28) $\underline{84''}$	□□$n\,n\,n$ / n 2 (35) $\underline{140}$
−1	3, −2	(6), $-\frac{5}{2}$				
$\frac{3}{2}\ -\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\ \frac{1}{2}$	1, −2; 3, 0	$(1)-\frac{9}{4}$, $(6)-\frac{1}{4}$	$n\,n\,n$ □□n	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$
$\frac{3}{2}\ -\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\ -\frac{1}{2}$	2, −1; 2; −1	$(3)-\frac{5}{4}$, $(3)-\frac{5}{4}$	□$n\,n$ □$n\,n$	$-\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	0
$\frac{3}{2}\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\ -\frac{3}{2}$	3, 0; 1, −2	$(6)-\frac{1}{4}$, $(1)-\frac{9}{4}$	□□n $n\,n\,n$	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$

1.3

SU_2SF	SU_3SF			[ ][ ][ ] / [ ][n][n] (10*) <u>50</u>	[ ][ ][ ][n] / [ ][n] (27) <u>126</u>	[ ][ ][ ][n][n] / [ ] (35) <u>140</u>
3, 0	(15), $-\frac{1}{2}$					
2, −1; 4, 1	$(3)-\frac{5}{4}$, $(10)\frac{3}{4}$	[ ][n][n]	[ ][ ][ ]	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$
3, 0; 3, 0	$(6)-\frac{1}{4}$, $(6)-\frac{1}{4}$	[ ][ ][n]	[ ][ ][n]	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
4, 1; 2, −1	$(10)\frac{3}{4}$, $(3)-\frac{5}{4}$	[ ][ ][ ]	[ ][n][n]	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$

1.4

SU_2CGC	SU_2SF	SU_3SF			[ ][ ][ ] / [n][n][n] 0 (10*) <u>50</u>	[ ][ ][ ][n] / [n][n] 1 (27) <u>126</u>	[ ][ ][ ][n][n][n] 3 (28) <u>84”</u>	[ ][ ][ ][n][n] / [n] 2 (35) <u>140</u>
0	4, −1	(10), $-\frac{3}{2}$						
$\frac{3}{2}\ -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\ \frac{3}{2}$	1, −2; 4, 1	$(1)-\frac{9}{4}$, $(10)\frac{3}{4}$	[n][n][n]	[ ][ ][ ]	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{2\sqrt{5}}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{3}{2}\ -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\ \frac{1}{2}$	2, −1; 3, 0	$(3)-\frac{5}{4}$, $(6)-\frac{1}{4}$	[ ][n][n]	[ ][ ][n]	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{5}}$	$\frac{3}{2\sqrt{5}}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{3}{2}\ \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\ -\frac{1}{2}$	3, 0; 2, −1	$(6)-\frac{1}{4}$, $(3)-\frac{5}{4}$	[ ][ ][n]	[ ][n][n]	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{5}}$	$\frac{3}{2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{2}\ \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\ -\frac{3}{2}$	4, 1; 1, −2	$(10)\frac{3}{4}$, $(1)-\frac{9}{4}$	[ ][ ][ ]	[n][n][n]	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{2}$

表 2 [21]×[21] 的 SU_mSF ($m=n-1$)

2.1

SU_2SF	SU_3SF		(8D) 64D	(8F) (64F)	(10*) 50	(27) 126
2, 1	(15*) $\frac{1}{2}$					
1, 0; 2, 1	(3*)$-\frac{1}{4}$, (8)$\frac{3}{4}$		$-\frac{1}{2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2\sqrt{5}}$
2, 1; 1, 0	(8)$\frac{3}{4}$, (3*)$-\frac{1}{4}$		$-\frac{1}{2\sqrt{5}}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2\sqrt{5}}$
2, 1; 3, 0	(8)$\frac{3}{4}$, (6)$-\frac{1}{4}$		$-\frac{3}{2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{5}}$
3, 0; 2, 1	(6)$-\frac{1}{4}$, (8)$\frac{3}{4}$		$\frac{3}{2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2\sqrt{5}}$

2.2

SU_2SF	SU_3SF		(8D) 64D	(8F) 64F	(10) 70	(10*) 50	(27) 126
3, 0	(15), $-\frac{1}{2}$						
1, 0; 3, 0	(3*)$-\frac{1}{4}$, (6)$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{\sqrt{5}}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{3}{10}}$
2, −1; 2, 1	(3)$-\frac{5}{4}$, (8)$\frac{3}{4}$		$-\sqrt{\frac{3}{10}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$
2, 1; 2, −1	(8)$\frac{3}{4}$, (3)$-\frac{5}{4}$		$-\sqrt{\frac{3}{10}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$
3, 0; 1, 0	(6)$-\frac{1}{4}$, (3*)$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{\sqrt{5}}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{3}{10}}$
3, 0; 3, 0	(6)$-\frac{1}{4}$, (6)$-\frac{1}{4}$		0	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	0

2.3

SU_2SF	SU_3SF		(1) $\overline{10}$	(8D) $\underline{64D}$	(8F) $\underline{64F}$	(27) $\underline{126}$
1, 0	$(6^*),\ -\frac{1}{2}$					
1, 0; 1, 0	$(3^*)-\frac{1}{4},\ (3^*)-\frac{1}{4}$		$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}$
2, −1; 2, 1	$(3)-\frac{5}{4},\ (8)\frac{3}{4}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$
2, 1; 2, −1	$(8)\frac{3}{4},\ (3)-\frac{5}{4}$		$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{10}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$
3, 0; 3, 0	$(6)-\frac{1}{4},\ (6)-\frac{1}{4}$		$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$	0	$-\frac{1}{2\sqrt{10}}$

2.4

SU_2SF	SU_3SF		(8D) $\underline{64D}$	(8F) $\underline{64F}$	(10) $\underline{70}$	(27) $\underline{126}$
2, −1	$(8)-\frac{3}{2}$					
1, 0; 2, −1	$(3^*)-\frac{1}{4},\ (3)-\frac{5}{4}$		$-\frac{1}{2\sqrt{5}}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2\sqrt{5}}$
2, −1; 1, 0	$(3)-\frac{5}{4},\ (3)^*-\frac{1}{4}$		$-\frac{1}{2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2\sqrt{5}}$
2, −1; 3, 0	$(3)-\frac{5}{4},\ (6)-\frac{1}{4}$		$\frac{3}{2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2\sqrt{5}}$
3, 0; 2, −1	$(6)-\frac{1}{4},\ (3)-\frac{5}{1}$		$-\frac{3}{2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{5}}$

SU_1SF (SU_2CGC) I_{3z}	SU_2SF λ_3, Y_3	SU_3SF $(\mu_3)z_3$	$\begin{pmatrix}[\nu_3]\\ [\nu_3'] A_3(n)\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}[\nu_1]\\ [\nu_1'] A_1(n)\end{pmatrix}\begin{matrix}[\nu_2]\\ [\nu_2'] A_2(n)\end{matrix}$	图	I_3 SU_1SF (μ_3) SU_2SF $\underline{\nu}$ SU_3SF
$I_1 I_{1Zz} I_2 I_{2z}$	$\lambda_1 Y_1, \lambda_2 Y_2$	$(\mu_1)z_1, (\mu_2)z_2$	图	（系数值）	

这里对 SU_2SF 用 $\lambda = 2I + 1$ 标志 SU_2 的不可约表示，用维数(μ)，$\underline{\nu}$（或 $\bar{\nu}$）分别标志 SU_3 和 SU_4 的不可约表示[3].

$SU_1SF(SU_2CGC)$ 可查表，因此例如表 1.1，1.2，1.4 根本不必计算，只有表 1.3 需要计算 SU_2SF（注意表 1.3 中，骨架的行数 $r = 2$，SU_2SF 为不可导）.

Haacke[3] 表 IV. I 的分表 $\left(\overline{15}, \frac{1}{2}\right)$ 和分表 $\left(\underline{8}, -\frac{3}{2}\right)$ 中，$64D$，$64F$ 的系数位相有错，应全部反号，否则不满足（9）式．本文表 2.2 和 2.4 已对此作了修正.

参　考　文　献

[1] 陈金全、王凡、高美娟，物理学报，**27**(1978)，31.
[2] J. J. De Swart, *Rev. Mod. Phys.*, **35** (1963), 916.
[3] E. M. Haacke, J. W. Moffat and P. Savaria, *J. Math Phys.*, **17** (1976), 2041.
[4] I. M. Gelfand and M. L. Tseitlin, "Dokl. Akad Nauk. SSSR" **71** (1950), 825.
G. E. Baird and L. C. Biedenharn, *J. Math. Phys.*, **5** (1964), 1723.
[5] 陈金全、王凡、高美娟，物理学报，**26**(1977)，427.
[6] G. Racah, *Phys Rev.*, **76** (1949), 1352. "Group Theory and Spectroscopy" (1951), Princeton.

A RECURSIVE FORMULA FOR THE CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS OF SU_n GROUP

CHEN JIN-QUAN　YU ZU-RONG　WANG FAN

(Department of Physics, Nanjing University)

ABSTRACT

It is proved that under the Gelfand-Biedenharn phase convention any SU_n singlet factor (SF) belongs to the type of the derivable or underivable, designated as (SU_n SF)d and (SU_r SF) respectively, and $(SU_n\ SF)d = (SU_r\ SF)$, $n = r+1,\ r+2, \cdots$. Therefore the calculation of any SU_n Clebsch-Gordan coefficients is reduced to the calculation of a few underivable singlet factor (SU_r SF).