第2卷 第6期 高能物理与核物理 Vol. 2, No. 6
1978年11月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS November, 1978

规范场的正则量子化(I)
——纯杨-Mills场

赵保恒 阎沐霖
(中国科学技术大学)

摘 要

我们在协变规范条件下对纯杨-Mills场进行正则量子化，研究了$\mathbf{A}_\mu$中两个非物理成份χ和χ'的相互作用拉氏量，其中只有一项对物理态之间的S矩阵元有贡献，它导致S矩阵的么正性破坏. 通过解一个简单的泛函微分方程，我们求出了规范补偿项. 在作用量中添上规范补偿项以后，物理态空间中的S矩阵可以写成物理粒子和非物理粒子之间没有耦合的形式，显示出S矩阵的规范无关性和么正性.

一、引 言

传统的量子化方法是正则量子化，而规范场的量子化往往采用非正则的形式[1]. 对范场正则量子化碰到的主要问题，是怎样导出有效作用量中的规范补偿项. 在正则量子化中，在各种规范条件下，用一种统一的方法，导出纯规范场、自发破缺规范场和引力场的规范补偿项，是一个仍未很好解决的问题. 在这篇文章中，我们讨论纯杨-Mills 场的正则量子化，以后我们还将研究自发破缺规范场和引力场的正则量子化.

我们采用有规范参数的协变规范条件，这使得我们必须应用带不定度规的量子场论([2]是一篇关于这种场论的比较新的总结性文章. 和[2]一样，我们不用η算符). 在有规范参数的协变规范条件下，电磁场的正则量子化，已为 B. Lautrup 等人研究过[3]. 我们把他们的方法推广到杨-Mills 场情况. 假定耦合常数$g=0$，杨-Mills 场的拉氏量几乎和自由电磁场的完全一样，只不过前者的场量还有一个同位旋指标. 因此，我们几乎可以把电磁场量子化的一些结果，直接应用到杨-Mills 场中来. 但是$g\neq 0$时，在杨-Mills 场情况发生物理态之间的S矩阵违反么正性的问题. 为了恢复么正性，需要在作用量中添上规范补偿项. 为了确定规范补偿项的形式，我们在第三节中研究了规范场$\mathbf{A}_\mu$的两个非物理成份χ和χ'的相互作用拉氏量. 在这个拉氏量中，实际上只有一项对物理态之间的S矩阵元有贡献，它导致么正性破坏. 在第四节中，我们用正则场论的方法求出了规范补偿项. 在作用量中加上规范补偿项以后，就消除了物理粒子和非物理粒子之间的耦合，使物

本文1978年1月27日收到.

理态空间中的 S 矩阵有规范无关性和么正性. 本文不讨论重正化，我们将忽略发散引起的各种问题.

二、量子化

像对电磁场量子化一样，我们引进一个拉格朗日乘子场 $\boldsymbol{\chi}$，于是杨-Mills 场的拉氏量可以写成:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}\mathbf{F}_{\mu\nu}^2 + \boldsymbol{\chi}\cdot\partial^\mu \mathbf{A}_\mu + \frac{1}{2}\alpha\boldsymbol{\chi}^2, \tag{1}$$

其中 $\mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu + g\mathbf{A}_\mu \times \mathbf{A}_\nu$，$\alpha$ 是规范参数. 我们采用 $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$ 的空间-时间度规.

由 (1) 可以求出场的运动方程:

$$\partial^\mu \mathbf{A}_\mu + \alpha\boldsymbol{\chi} = 0, \tag{2}$$

$$\partial^\mu \mathbf{F}_{\mu\nu} - \partial_\nu \boldsymbol{\chi} + g\mathbf{A}^\mu \times \mathbf{F}_{\mu\nu} = 0. \tag{3}$$

利用由 Jacobi 恒等式导出的关系:

$$(\partial_\mu + g\mathbf{A}_\mu \times)[(\partial_\nu + g\mathbf{A}_\nu \times)\mathbf{F}^{\mu\nu}] = 0, \tag{4}$$

由 (3) 可以得到:

$$\Box\boldsymbol{\chi} + g\mathbf{A}_\mu \times \partial^\mu \boldsymbol{\chi} = 0. \tag{5}$$

和 $\mathbf{A}^0$, $\mathbf{A}^k$ 共轭的正则变量为:

$$\pi_0^a = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A^{a,0}} = \chi^a, \quad \pi_k^a = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A^{a,k}} = F_{k0}^a, \tag{6}$$

其中 $a = 1, 2, 3$ 是同位旋指标. 为了把场量子化，我们引进等时对易关系:

$$\left.\begin{aligned} &[A_\mu^a(x), \pi_\nu^b(y)]_{x_0=y_0} = i\delta_{ab}g_{\mu\nu}\delta^3(x-y), \\ &[A_\mu^a(x), A_\nu^b(y)]_{x_0=y_0} = 0, \\ &[\pi_\mu^a(x), \pi_\nu^b(y)]_{x_0=y_0} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

现在研究 $g = 0$ 的情形. 这时场的运动方程为

$$\begin{aligned} &\partial^\mu \mathbf{A}_\mu + \alpha\boldsymbol{\chi} = 0, \\ &\Box\mathbf{A}_\mu - (1-\alpha)\partial_\mu \boldsymbol{\chi} = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

于是

$$\Box\boldsymbol{\chi} = 0, \tag{9}$$

$$\Box\Box\mathbf{A}_\mu = 0. \tag{10}$$

由场方程和等时对易关系，可以得到 x_0, y_0 任意的对易关系:

$$[\chi^a(x), \chi^b(y)] = 0, \tag{11}$$

$$[A_\mu^a(x), \chi^b(y)] = -i\delta_{ab}\partial_\mu^x D(x-y), \tag{12}$$

$$[A_\mu^a(x), A_\nu^b(y)] = -i\delta_{ab}g_{\mu\nu}D(x-y) + i(1-\alpha)\delta_{ab}\partial_\mu^x\partial_\nu^x E(x-y), \tag{13}$$

其中

$$D(x) = \frac{-i}{(2\pi)^3}\int d^4k\, \epsilon(k_0)\delta(k^2)e^{-ikx}, \tag{14}$$

$$E(x)=\frac{-i}{(2\pi)^3}\int d^4k\,\epsilon(k_0)\delta'(k^2)e^{-ikx}. \tag{15}$$

从 (11)—(13) 可以得到

$$\langle 0|T\chi^a(x)\chi^b(y)|0\rangle=0, \tag{16}$$

$$\langle 0|TA^a_\mu(x)\chi^b(y)|0\rangle=-i\delta_{ab}\partial^x_\mu D_F(x-y), \tag{17}$$

$$\langle 0|TA^a_\mu(x)A^b_\nu(y)|0\rangle=-i\delta_{ab}g_{\mu\nu}D_F(x-y)+i(1-\alpha)\partial^x_\mu\partial^x_\nu E_F(x-y), \tag{18}$$

式中

$$D_F(x)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ikx}}{k^2+i\epsilon}, \tag{19}$$

$$E_F(x)=-\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ikx}}{(k^2+i\epsilon)^2}. \tag{20}$$

所以在动量空间中杨-Mills 场的传播子为

$$-i\delta_{ab}[g_{\mu\nu}-(1-\alpha)k_\mu k_\nu/(k^2+i\epsilon)]/(k^2+i\epsilon). \tag{21}$$

(11) 说明 $\boldsymbol{\chi}$ 是非物理的零度规的场. (2) 表示 $\boldsymbol{\chi}$ 实质上是包含在 $\mathbf{A}_\mu$ 内的. 下面我们说明，从 $\mathbf{A}_\mu$ 中还可以分解出另一个非物理的零度规的场 $\boldsymbol{\chi}'$. 为此，我们仿照 Lautrup 处理电磁场的方法[3]，引入一个量

$$\boldsymbol{\Lambda}(x)=\frac{1}{2}\Delta^{-1}\left[x_0\dot{\boldsymbol{\chi}}(x)-\frac{1}{2}\boldsymbol{\chi}(x)\right], \tag{22}$$

其中 Δ 是三维空间中的 Laplace 算符. $\boldsymbol{\Lambda}$ 满足方程

$$\Box\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{\chi}. \tag{23}$$

此外，我们还定义

$$\mathbf{G}_\mu=\mathbf{A}_\mu+(\alpha-1)\partial_\mu\boldsymbol{\Lambda}. \tag{24}$$

易证

$$\partial^\mu\mathbf{G}_\mu=-\boldsymbol{\chi}, \tag{25}$$

$$\Box\mathbf{G}_\mu=0. \tag{26}$$

利用

$$E(x)=\frac{1}{2}\Delta^{-1}[x_0\dot{D}(x)-D(x)], \tag{27}$$

可以得到

$$[G^a_\mu(x),G^b_\nu(y)]=-i\delta_{ab}g_{\mu\nu}D(x-y). \tag{28}$$

(26) 说明 $\mathbf{G}_\mu$ 可以展开，

$$G^a_\mu(x)=\sum_{\mathbf{k},\lambda}e_\mu(\mathbf{k},\lambda)[a(\mathbf{k},\lambda,a)f_{\mathbf{k}}(x)+a^+(\mathbf{k},\lambda,a)f^*_{\mathbf{k}}(x)], \tag{29}$$

其中 $f_{\mathbf{k}}(x)=e^{-ikx}/\sqrt{2\omega V}$, $\omega=|\mathbf{k}|$; $e_\mu(\mathbf{k},\lambda)(\lambda=0,1,2,3)$ 是极化矢量. 对每一个动量 $\mathbf{k}$ 引进一个坐标标架，取 $e^\mu(\mathbf{k},\lambda)=\delta_{\mu\lambda}$, 由 (28) 就有

$$\left.\begin{aligned}&[a(\mathbf{k},\lambda,a),a^+(\mathbf{k}',\lambda',b)]=-\delta_{ab}g_{\lambda\lambda'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'},\\&[a(\mathbf{k},\lambda,a),a(\mathbf{k}',\lambda',b)]=0.\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

这表明时间分量的介子 ($\lambda=0$) 是负度规粒子，横矢量介子 ($\lambda=1,2$) 和纵矢量介子

($\lambda=3$) 是正度规粒子.

定义

$$\left.\begin{aligned}L^a(\mathbf{k})&=\alpha(\mathbf{k},0,a)-\alpha(\mathbf{k},3,a),\\M^a(\mathbf{k})&=\alpha(\mathbf{k},0,a)+\alpha(\mathbf{k},3,a).\end{aligned}\right\}\tag{31}$$

则

$$\left.\begin{aligned}&[L^a(\mathbf{k}),M^b(\mathbf{k}')^+]=-2\delta_{ab}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'},\\&[L^a(\mathbf{k}),L^b(\mathbf{k}')]=[L^a(\mathbf{k}),L^b(\mathbf{k}')^+]=0,\\&[M^a(\mathbf{k}),M^b(\mathbf{k}')]=[M^a(\mathbf{k}),M^b(\mathbf{k}')^+]=0,\\&[M^a(\mathbf{k}),L^b(\mathbf{k}')]=0.\end{aligned}\right\}\tag{32}$$

(29) 可以写成

$$\mathbf{G}_\mu=\mathbf{B}_\mu+\mathbf{C}'_\mu+\mathbf{D}_\mu,\tag{33}$$

其中

$$B^a_\mu(x)=\sum_{\substack{\mathbf{k}\\ \lambda=1,2}}e_\mu(\mathbf{k},\lambda)[\alpha(\mathbf{k},\lambda,a)f_{\mathbf{k}}(x)+\alpha^+(\mathbf{k},\lambda,a)f^*_{\mathbf{k}}(x)],\tag{34}$$

$$C'^a_\mu(x)=\sum_{\mathbf{k}}\frac{k'_\mu}{2\omega}[L^a(\mathbf{k})f_{\mathbf{k}}(x)+L^a(\mathbf{k})^+f^*_{\mathbf{k}}(x)],\tag{35}$$

$$D^a_\mu(x)=\sum_{\mathbf{k}}\frac{k_\mu}{2\omega}[M^a(\mathbf{k})f_{\mathbf{k}}(x)+M^a(\mathbf{k})^+f^*_{\mathbf{k}}(x)].\tag{36}$$

在动量 $\mathbf{k}$ 对应的坐标标架中

$$\left.\begin{aligned}k_\mu&=(\omega,0,0,-\omega),\\k'_\mu&=(\omega,0,0,\omega).\end{aligned}\right\}\tag{37}$$

因此

$$k^2=k'^2=0,\quad k\cdot k'=2\omega^2.\tag{38}$$

易见

$$\partial^\mu\mathbf{B}_\mu=0,\quad\Box\mathbf{B}_\mu=0,\tag{39}$$

$$\partial^\mu\mathbf{D}_\mu=0,\quad\Box\mathbf{D}_\mu=0,\tag{40}$$

此外由 (25) 和 (33) 得

$$\partial^\mu\mathbf{C}'_\mu=-\boldsymbol{\chi}.\tag{41}$$

由 (35)、(38) 和 (41) 得

$$\boldsymbol{\chi}(x)=\sum_{\mathbf{k}}i\omega[\mathbf{L}(\mathbf{k})f_{\mathbf{k}}(x)-\mathbf{L}^+(\mathbf{k})f^*_{\mathbf{k}}(x)].\tag{42}$$

定义

$$\boldsymbol{\chi}'(x)=\sum_{\mathbf{k}}\frac{-i}{2\omega}[\mathbf{M}(\mathbf{k})f_{\mathbf{k}}(x)-\mathbf{M}^+(\mathbf{k})f^*_{\mathbf{k}}(x)].\tag{43}$$

显然

$$\Box\boldsymbol{\chi}'=0,\tag{44}$$

$$\partial_\mu\boldsymbol{\chi}'=-\mathbf{D}_\mu.\tag{45}$$

由 (32) 易证

$$[\chi'^a(x), \chi'^b(y)] = 0, \tag{46}$$

$$[\chi^a(x), \chi'^b(y)] = i\delta_{ab}D(x-y). \tag{47}$$

所以 $\boldsymbol{\chi}'$ 也是一种非物理的零度规的场.

由 (46) 和 (47) 我们有

$$\langle 0|T\chi'^a(x)\chi'^b(y)|0\rangle = 0, \tag{48}$$

$$\langle 0|T\chi^a(x)\chi'^b(y)|0\rangle = i\delta_{ab}D_F(x-y). \tag{49}$$

把 (45) 代入 (33)，再把 (33) 代入 (24) 就有

$$\mathbf{A}_\mu = \mathbf{B}_\mu - \partial_\mu\boldsymbol{\chi}' + \mathbf{C}_\mu, \tag{50}$$

$$\mathbf{C}_\mu = (1-\alpha)\partial_\mu\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{C}'_\mu. \tag{51}$$

其中 $\mathbf{B}_\mu$ 是物理的横场，$-\partial_\mu\boldsymbol{\chi}'$ 和 $\mathbf{C}_\mu$ 是非物理场；$-\partial_\mu\boldsymbol{\chi}'$ 是和 $\mathbf{M}$、$\mathbf{M}^+$ 有关的部分，$\mathbf{C}_\mu$ 是和 $\mathbf{L}$、$\mathbf{L}^+$ 有关的部分 (由 (22)、(42) 和 (35)).

由 (51)、(41)、(23) 和 (35) 得

$$\left.\begin{aligned} &\partial^\mu\mathbf{C}_\mu = -\alpha\boldsymbol{\chi}, \\ &\Box\mathbf{C}_\mu = (1-\alpha)\partial_\mu\boldsymbol{\chi}. \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

易见

$$\left.\begin{aligned} &\langle 0|T\chi^a(x)C^b_\mu(y)|0\rangle = 0, \quad \langle 0|TC^a_\mu(x)C^b_\nu(y)|0\rangle = 0, \\ &\langle 0|TB^a_\mu(x)\chi^b(y)|0\rangle = 0, \quad \langle 0|TB^a_\mu(x)C^b_\nu(y)|0\rangle = 0, \\ &\langle 0|TB^a_\mu(x)\chi'^b(y)|0\rangle = 0. \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

由于在我们的理论中存在负度规和零度规的场，并非所有态矢量都是物理的. 我们用 $\boldsymbol{\chi}$ 的正频率部分定义物理态，

$$\boldsymbol{\chi}^{(+)}(x)|\text{phys}\rangle = 0. \tag{54}$$

由 $\boldsymbol{\chi}$ 的自对易性，可以看出有一定横矢量介子的物理态为

$$|\text{phys}\rangle = \left\{1 + \sum_{\mathbf{k},a} g_a(\mathbf{k})L^a(\mathbf{k})^+ + \sum_{\substack{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2\\a,b}} g_{ab}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)L^a(\mathbf{k}_1)^+L^b(k_2)^+ + \cdots\right\}|n_1, n_2\rangle, \tag{55}$$

g_a, g_{ab} 是动量的任意函数，$|n_1, n_2\rangle$ 是只有横矢量介子的态矢量. 在物理态中，除了横矢量介子，还有 $\mathbf{L}^+$ 引起的规范激发，但正如量子电动力学中一样，它们不引起可观测的物理效应.

现在讨论 $g \neq 0$ 的情形. 在量子电动力学中，有相互作用时 $\Box\chi = 0$ 仍成立 ($\partial^\mu A_\mu = -\alpha\chi$，$A_\mu$ 是电磁场)，这保证了物理态条件[即初态 (终态) 是物理态时，终态 (初态) 也是物理态]成立. 但是对于杨-Mills 场，有相互作用时 $\Box\boldsymbol{\chi} = -g\mathbf{A}_\mu \times \partial^\mu\boldsymbol{\chi} \neq 0$，物理态条件不成立，从而物理态空间中 S 矩阵的么正性被破坏.

(4) 中的 $g\mathbf{A}_\mu \times \partial^\mu\boldsymbol{\chi}$ 项是破坏么正性的根源，如果我们能找出这一项对应的拉氏量，然后在微扰论计算中，用某种方法消除它的贡献，就有可能恢复么正性. 在下一节里，我们研究 $\boldsymbol{\chi}$ 和 $\boldsymbol{\chi}'$ 的相互作用拉氏量.

三、χ和χ'的相互作用拉氏量

我们把拉氏量 (1) 中包含 $\boldsymbol{\chi}$ (或 $\mathbf{C}_\mu$) 和 $\boldsymbol{\chi}'$ 的部分记为 $\mathscr{L}_\chi$. 当 $g=0$ 时，从 $\boldsymbol{\chi}$ 和 $\boldsymbol{\chi}'$ 满足的方程和对易关系 (9), (11), (44), (46) 和 (47) 可以看出

$$\mathscr{L}_\chi = \partial^\mu \boldsymbol{\chi} \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\chi}'. \tag{56}$$

这个式子也可以用下面的方法求出. 把 (1) 中的 $\boldsymbol{\chi}\cdot\partial^\mu \mathbf{A}_\mu$ 项用 $-\partial^\mu\boldsymbol{\chi}\cdot\mathbf{A}_\mu$ 代替，

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu)^2 - \partial^\mu \boldsymbol{\chi}\cdot \mathbf{A}_\mu + \frac{1}{2}\alpha\boldsymbol{\chi}^2, \tag{57}$$

代入 $\mathbf{A}_\mu = \mathbf{B}_\mu - \partial_\mu\boldsymbol{\chi}' + \mathbf{C}_\mu$ 并利用(52)，在略去 $\partial^\mu(\cdots)_\mu$ 形式的项后得

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu \mathbf{B}_\nu - \partial_\nu \mathbf{B}_\mu)^2 + \partial^\mu\boldsymbol{\chi}\cdot\partial_\mu\boldsymbol{\chi}'. \tag{58}$$

其中包含 $\boldsymbol{\chi}$ 和 $\boldsymbol{\chi}'$ 的部分恰好就是 (56) 的 $\mathscr{L}_\chi$.

当 $g\neq 0$ 时，我们把 $\mathscr{L}_\chi$ 写成

$$\mathscr{L}_\chi = \partial^\mu\boldsymbol{\chi}\cdot\partial_\mu\boldsymbol{\chi}' + \mathscr{L}_{\chi I}. \tag{59}$$

其中 $\mathscr{L}_{\chi I}$ 是相互作用拉氏量. 已知 $\boldsymbol{\chi}$ 满足方程 (5)，所以 $\mathscr{L}_{\chi I}$ 有下面的性质：

$$\frac{\delta}{\delta\boldsymbol{\chi}'}\int d^4x\mathscr{L}_{\chi I} = -g\mathbf{A}_\mu\times\partial^\mu\boldsymbol{\chi}. \tag{60}$$

现在把 (59) 中的 $\mathscr{L}_\chi$ 改写成

$$\mathscr{L}_\chi = \partial^\mu\boldsymbol{\chi}\cdot\partial_\mu\boldsymbol{\chi}' - g\boldsymbol{\chi}\cdot(\mathbf{A}_\mu\times\partial^\mu\boldsymbol{\chi}') + \mathscr{L}', \tag{61}$$

其中

$$\mathscr{L}' \equiv \mathscr{L}_{\chi I} + g\boldsymbol{\chi}\cdot(\mathbf{A}_\mu\times\partial^\mu\boldsymbol{\chi}'). \tag{62}$$

我们把 $\mathscr{L}'$ 中的 $\boldsymbol{\chi}'$ 用 $\boldsymbol{\chi}'+\boldsymbol{\chi}_c$ 代替，其中 $\boldsymbol{\chi}_c$ 是一个任意的经典部分，但是保持(62)右边第二项中的 $\mathbf{A}_\mu$ 不动 (注意 $\mathbf{A}_\mu$ 也包含着 $\boldsymbol{\chi}'$)，于是 $\mathscr{L}'$ 变成

$$\mathscr{L}'_c = \mathscr{L}_{\chi I}|_{\chi'\to\chi'+\chi_c} + g\boldsymbol{\chi}\cdot[\mathbf{A}_\mu\times\partial^\mu(\boldsymbol{\chi}'+\boldsymbol{\chi}_c)]. \tag{63}$$

由 (60)，并注意 $\partial^\mu\mathbf{A}_\mu = -\alpha\boldsymbol{\chi}$，就得到

$$\frac{\delta}{\delta\boldsymbol{\chi}_c}\int d^4x\mathscr{L}'_c|_{\chi_c=0} = 0. \tag{64}$$

考虑 $\mathscr{L}'$ 对应顶角的 Feynman 规则. 如果我们暂时忽略 $\mathbf{A}_\mu$ 中的 $\boldsymbol{\chi}$ 未作上述替换的事实，从 (64) 我们立即得到这样的结论：$\mathscr{L}'$ 对应的至少与一根 $\boldsymbol{\chi}'$ 线相连的顶角为零.

Feynman 规则是在相互作用表象中写出来的. 在相互作用表象中，$\mathbf{A}_\mu = \mathbf{B}_\mu - \partial_\mu\boldsymbol{\chi}' + \mathbf{C}_\mu$，因此 (62) 右边第二项可以写成 $g\boldsymbol{\chi}\cdot(\mathbf{A}_\mu\times\partial^\mu\boldsymbol{\chi}') = g\boldsymbol{\chi}\cdot[(\mathbf{B}_\mu+\mathbf{C}_\mu)\times\partial^\mu\boldsymbol{\chi}']$. 这表示从 (62) 右边第二项中 $\mathbf{A}_\mu$ 是引不出 $\boldsymbol{\chi}'$ 线来的. 因此虽然我们没有把这个 $\mathbf{A}_\mu$ 中的 $\boldsymbol{\chi}'$ 换成 $\boldsymbol{\chi}'+\boldsymbol{\chi}_c$，但是从 (64) 推出的关于 $\mathscr{L}'$ 对应的与 $\boldsymbol{\chi}'$ 线相连的顶角为零的 Feynman 规则仍是正确的. 所以实际上可以认为 $\mathscr{L}'$ 包含 $\boldsymbol{\chi}$ 和 $\mathbf{C}_\mu$ 但不包含 $\boldsymbol{\chi}'$.

现在考虑初态和终态都是物理态的 S 矩阵元. 在相互作用表象中，S 矩阵按 Wick 定理的展开式内某个 $\mathscr{L}'$ 项的 $\boldsymbol{\chi}$ 如果没有和 (61) 右边第二项中的 $\boldsymbol{\chi}'$ 收缩掉，显然对上

述的 S 矩阵元没有贡献．如果收缩掉，从 (61) 右边第二项中还要剩下 $\boldsymbol{\chi}$ 和 $\mathbf{C}_\mu$，这样的讨论可以循环下去，因此我们知道，$\mathscr{L}'$ 对物理态之间的 S 矩阵元没有贡献．在计算物理态之间的 S 矩阵元时，可以取

$$\mathscr{L}_{\chi\text{eff}} = \partial^\mu\boldsymbol{\chi}\cdot\partial_\mu\boldsymbol{\chi}' - g\boldsymbol{\chi}\cdot(\mathbf{A}_\mu\times\partial^\mu\boldsymbol{\chi}'). \tag{65}$$

并且上式右边第二项中的 $\boldsymbol{\chi}$ 和 $\boldsymbol{\chi}'$ 必须收缩成封闭的回路 (loops)，否则对物理态之间的 S 矩阵元没有贡献．

在资料 [4]、[5] 中也曾研究过 $\mathscr{L}_\chi$，但是他们漏掉了 $\mathscr{L}'$ 项．这样，从 (61) 就得不到 $\boldsymbol{\chi}$ 的场方程 (5)．因为实际上 $\mathbf{A}_\mu$ 也是和 $\boldsymbol{\chi}'$ 有关的，而且在 Heisenberg 表象中 $\mathbf{A}_\mu\neq\mathbf{B}_\mu-\partial_\mu\boldsymbol{\chi}'+\mathbf{C}_\mu$．(65) 中的 $\mathscr{L}_{\chi\text{eff}}$ 和 $\mathscr{L}_\chi$ 只是在计算物理态之间的 S 矩阵元时才是等效的．

四、规范补偿项

根据上一节的讨论我们知道，计算物理态之间的 S 矩阵元时，可以取

$$S = T\exp i\int d^4x[\mathscr{L}_{BI} - g\boldsymbol{\chi}\cdot(\mathbf{A}_\mu\times\partial^\mu\boldsymbol{\chi}')], \tag{66}$$

其中 $\mathscr{L}_{BI}$ 是只包含 $\mathbf{B}_\mu$ 的相互作用拉氏量．在上式中 $\boldsymbol{\chi}$ 和 $\boldsymbol{\chi}'$ 应全部收缩成封闭的回路，否则无贡献．在编时算符后面，$\mathscr{L}_{BI}$ 和 $-g\boldsymbol{\chi}\cdot(\mathbf{A}_\mu\times\partial^\mu\boldsymbol{\chi}')$ 是可对易的，所以 (66) 又可以写成

$$S = T\exp i\int d^4x\mathscr{L}_{BI}\exp(-ig)\int d^4x\boldsymbol{\chi}\cdot(\mathbf{A}_\mu\times\partial^\mu\boldsymbol{\chi}'). \tag{67}$$

现在研究一下上式最后一个因子中 $\boldsymbol{\chi}$ 和 $\boldsymbol{\chi}'$ 收缩成封闭回路时的贡献，这相当于计算在外场 $\mathbf{A}_\mu$ 中 $\boldsymbol{\chi}$ 和 $\boldsymbol{\chi}'$ 的真空涨落矩阵元：

$$W = \langle 0|S'|0\rangle, \tag{68}$$

其中

$$S' = T\exp(-ig)\int d^4x\boldsymbol{\chi}\cdot(\mathbf{A}_\mu\times\partial^\mu\boldsymbol{\chi}'), \tag{69}$$

$|0\rangle$ 是在外场 $\mathbf{A}_\mu$ 作用下 $\boldsymbol{\chi}$ 和 $\boldsymbol{\chi}'$ 的真空态．令外场 $\mathbf{A}_\mu\to\mathbf{A}_\mu+\delta\mathbf{A}_\mu$，这导致 W 改变，

$$\begin{aligned}\delta W &= -ig\langle 0|T\int d^4x\boldsymbol{\chi}\cdot(\delta\mathbf{A}_\mu\times\partial^\mu\boldsymbol{\chi}')S'|0\rangle\\ &= -ig\epsilon_{abc}\int d^4x\delta A^a_\mu\langle 0|T\partial^\mu\chi'^b\chi^c S'|0\rangle.\end{aligned} \tag{70}$$

令

$$i\mathscr{D}_{bc}(x,y) = \langle 0|T\chi'^b(x)\chi^c(y)S'|0\rangle/W, \tag{71}$$

则 (70) 可以写成

$$\frac{\delta W}{W} = g\epsilon_{abc}\int d^4x\delta A^a_\mu(x)\partial^\mu\mathscr{D}_{bc}(x,x), \tag{72}$$

其中 ∂^μ 作用于 $\mathscr{D}_{bc}(x,x)$ 中第一个变量 x．为了求出 W，我们先讨论一下 $\mathscr{D}$ 函数的性质．对于一个 $\mathbf{A}_\mu$ 作为外场，拉氏量为 $\mathscr{L}=\partial^\mu\boldsymbol{\chi}\cdot\partial_\mu\boldsymbol{\chi}'-g\boldsymbol{\chi}\cdot(\mathbf{A}_\mu\times\partial^\mu\boldsymbol{\chi}')$ 的理论，

$\mathscr{D}$ 函数满足方程

$$[\delta_{ab}\Box + g\hat{A}_\mu^{ab}(x)\partial_x^\mu]\mathscr{D}_{bc}(x, y) = -\delta_{ac}\delta^4(x-y), \tag{73}$$

其中 $\Box = \partial^2/\partial x^\mu \partial x_\mu$, $\hat{A}_\mu^{ab} = \epsilon_a c_b A_\mu^c$. (73) 可以写成同位旋空间和四维空间-时间直积空间中的矩阵形式:

$$(\Box + g\hat{A}_\mu\partial^\mu)\mathscr{D} = -1. \tag{74}$$

(74) 有解

$$\mathscr{D} = D_F(1 - g\hat{A}_\mu\partial^\mu D_F)^{-1}, \tag{75}$$

其中

$$D_F = (-\Box + i\epsilon)^{-1}. \tag{76}$$

在矩阵形式下, (72) 可以写成

$$\begin{aligned}\frac{\delta W}{W} &= \mathrm{Tr}\, g\delta\hat{A}_\mu\partial^\mu\mathscr{D} \\ &= \mathrm{Tr}\, g\delta\hat{A}_\mu\partial^\mu D_F(1 - g\hat{A}_\nu\partial^\nu D_F)^{-1} \\ &= -\mathrm{Tr}\,[\delta(1 - g\hat{A}_\mu\partial^\mu D_F)](1 - g\hat{A}_\nu\partial^\nu D_F)^{-1}.\end{aligned} \tag{77}$$

对于矩阵 K, $\det K = \exp\mathrm{Tr}\log K$, 所以 $\mathrm{Tr}\,(\delta K)K^{-1} = \delta\log\det K$. 因此 (77) 又可以表示成

$$\frac{\delta W}{W} = \delta\log[\det(1 - g\hat{A}_\mu\partial^\mu D_F)]^{-1}. \tag{78}$$

对此式积分, 并注意 $g = 0$ 时 $W = 1$, 就得到

$$W = [\det(1 - g\hat{A}_\mu\partial^\mu D_F)]^{-1} = \exp[-\mathrm{Tr}\log(1 - g\hat{A}_\mu\partial^\mu D_F)]. \tag{79}$$

所以当 $\boldsymbol{\chi}$ 和 $\boldsymbol{\chi}'$ 收缩成封闭回路时

$$S = T\exp i\left\{\int d^4x\mathscr{L}_{BI} + i\mathrm{Tr}\log(1 - g\hat{A}_\mu\partial^\mu D_F)\right\}. \tag{80}$$

这个 S 矩阵在物理态空间中不是么正的, 因为它包含了相互作用 $-g\boldsymbol{\chi}\cdot(\mathbf{A}_\mu \times \partial^\mu\boldsymbol{\chi}')$ 的贡献.

根据 (1), 杨-Mills 场的作用量为

$$A = \int d^4x\mathscr{L} = \int d^4x\left[-\frac{1}{4}\mathbf{F}_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu\mathbf{A}_\mu)^2\right], \tag{81}$$

(已用 $\partial^\mu\mathbf{A}_\mu = -\alpha\boldsymbol{\chi}$ 消去 $\boldsymbol{\chi}$). 现在我们用有效作用量

$$A_{\mathrm{eff}} = \int d^4x\left[-\frac{1}{4}\mathbf{F}_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu\mathbf{A}_\mu)^2\right] - i\mathrm{Tr}\log(1 - g\hat{A}_\mu\partial^\mu D_F) \tag{82}$$

代替 A. 结果 (80) 指数上第二项被抵消.

$$S = T\exp i\int d^4x\mathscr{L}_{BI}. \tag{83}$$

在这个 S 矩阵中, 物理粒子和非物理粒子之间没有耦合, 于是利用 Cutkosky 的切割方程就可以说明 S 矩阵在物理态空间中是么正的[6]. 又 $\mathscr{L}_{BI}$ 和 $\mathbf{B}_\mu$ 的传播子场不含规范参数 α, 所以物理态空间中的 S 矩阵又是明显规范无关的. 由于 $\mathbf{B}_\mu$ 是横场, (83) 并不是明显相对论协变的. 我们可以写出一种和 (83) 等价的形式:

$$S = T\exp i\left\{\int d^4x\mathscr{L}_I - i\mathrm{Tr}\log(1 - g\hat{A}_\mu\partial^\mu D_F)\right\}. \tag{84}$$

其中 $\mathscr{L}_I = -g\partial_\mu \mathbf{A}_\nu \cdot (\mathbf{A}^\mu \times \mathbf{A}^\nu) - \frac{1}{4} g^2(\mathbf{A}_\mu \times \mathbf{A}_\nu)^2$ 是 (1) 中 $\mathscr{L}$ 的相互作用部分. 在物理态空间中, (83) 和 (84) 给出完全相同的结果，但是 (84) 中的 S 矩阵是明显协变的.

一个 S 矩阵有么正性的规范场理论，应当以 (82) 中的作用量 A_{eff} 作为出发点. A_{eff} 中的 $-\frac{1}{2\alpha}\int d^4x(\partial^\mu \mathbf{A}_\mu)^2$ 叫规范固定项; $-i\,\mathrm{Tr}\log(1-\hat{A}_\mu\partial^\mu D_F)$ 叫规范补偿项. 我们的 A_{eff} 和通常给出的相同[1].

规范补偿项也可以用 Faddeev-Popov 鬼粒子 $\mathbf{C}$ 表示. $\mathbf{C}$ 的自旋为零,但是服从 Fermi 统计. 在 (65) 中令 $\boldsymbol{\chi} \to \mathbf{C}^+$, $\boldsymbol{\chi}' \to \mathbf{C}$ 则得 $\mathbf{C}$ 的拉氏量:

$$\mathscr{L}_{FP} = \partial^\mu \mathbf{C}^+ \cdot \partial_\mu \mathbf{C} - g\mathbf{C}^+ \cdot (\mathbf{A}_\mu \times \partial^\mu \mathbf{C}) \tag{85}$$

$\overline{C^a C^{b+}}$ 和 $\overline{\chi^a \chi'^b}$ 一样，$-g\mathbf{C}^+ \cdot (\mathbf{A}_\mu \times \partial^\mu \mathbf{C})$ 和 $-g\boldsymbol{\chi} \cdot (\mathbf{A}_\mu \times \partial^\mu \boldsymbol{\chi}')$ 相似，但是 $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{C}^+$ 收缩成封闭回路时,有一个由 Fermi 统计引起的负号因子. 如果用

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} = -\frac{1}{4}\mathbf{F}_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu \mathbf{A}_\mu)^2 + \partial^\mu \mathbf{C}^+ \cdot \partial_\mu \mathbf{C} - g\mathbf{C}^+ \cdot (\mathbf{A}_\mu \times \partial^\mu \mathbf{C}) \tag{86}$$

代替 (1) 中的 $\mathscr{L}$, 则 (80) 指数上第二项的贡献也被抵消. 证明如下: $-g\mathbf{C}^+ \cdot (\mathbf{A}_\mu \times \partial^\mu \mathbf{C})$ 中的 $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{C}^+$ 必须收缩成封闭的回路，否则对物理态之间的 S 矩阵元没有贡献. 我们可以重复 (68)—(79) 的步骤,计算

$$\left.\begin{aligned} &W' = \langle 0|S''|0\rangle, \\ &S'' = T\exp(-ig)\int d^4x \mathbf{C}^+ \cdot (\mathbf{A}_\mu \times \partial^\mu \mathbf{C}). \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

但是

$$\begin{aligned} \delta W' &= -ig\langle 0|T\int d^4x \mathbf{C}^+ \cdot (\delta \mathbf{A}_\mu \times \partial^\mu \mathbf{C})S''|0\rangle \\ &= ig\epsilon_{abc}\int d^4x\,\delta A_\mu^a \langle 0|T\partial^\mu C^b C^{+c} S''|0\rangle. \end{aligned} \tag{88}$$

上式最后一行和 (70) 最后一行符号相反,这是由 $\mathbf{C}$ 的 Fermi 统计性引起的. 从 (88) 可以得到

$$W' = \exp \mathrm{Tr}\log(1 - g\hat{A}_\mu \partial^\mu D_F). \tag{89}$$

W 和 W' 指数上的符号相反，因此用 (86) 中的 $\mathscr{L}_{\text{eff}}$ 代替 (1) 中的 $\mathscr{L}$，也得到 (83) 和 (84) 中的 S 矩阵.

最后,我们谨对中国科学技术大学基本粒子组的讨论表示感谢.

参　考　资　料

[1] B. S. Dewitt, *Phys. Rev.*, **162**(1967), 1195, 1239; L. D. Faddeev and V. N. Popov, *Phys. Lett.*, **25B**(1967), 29; S. Mandelstam. *Phys. Rev.*, **175**(1968), 1580, 1604; E. S. Fradkin and I. V. Tuytin, *Phys. Rev.*, **D2**(1970), 2841; G. 't Hooft, *Nucl. Phys.*, **B33**(1971), 173.
[2] N. Nakanish, *Supp. Prog. Theor. Phys.*, 51(1972), 1.
[3] B. Lautrup, *Kgl. Danske Vidensk Selsk., Mat.-Fys.*, **35**(1967), No. 11; N. Nakanishi, *Prog. Theor. Phys.*, **35**(1966), 1111; **38**(1967), 881; H. P. Dürr and E. Rudolph, *Nuovo Cimento*, **62A**

(1969), 411.
[4] J. P. Hsu and E. C. G. Sudarshan, *Phys. Rev.*, D9(1974), 1678.
[5] N. Gapta, *Phys. Rev.*, D14(1976), 2596.
[6] R. E. Cutkosky, *J. Math. Phys.*, 1(1960), 429; M. Veltman, *Physica*, 29(1963), 1971; G. 't Hooft and M. Veltman, Diagrammar, CERN Report 73/9 (1973).

CANONICAL QUANTIZATION OF GAUGE FIELDS (I) ——THE YANG-MILLS FIELD

ZHAO BAO-HENG YAN MU-LIN
(*University of Science and Technology of China*)

ABSTRACT

The Yang-Mills field is quantized within the canonical formalism in covariant gauges. The interaction Lagrangian of $\boldsymbol{\chi}$ and $\boldsymbol{\chi}'$, i.e. the unphysical components of $\mathbf{A}_\mu$, is studied. In this Lagrangian there is only one term contributing to the S matrix elements between physical states. It is the source of the breaking of the unitarity of the physical S matrix. We get the gauge compensating term by solving a simple functional differential equation. If the gauge compensating term is added to the action, the S matrix in the physical state vector space can be expressed in a form which has no couplings of physical and unphysical particles, and so the physical S matrix is gauge independent and unitary.