第2卷 第3期 高能物理与核物理 Vol. 2, No. 3
1978年5月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS May, 1978

用量纲分析法求解太阳宇宙线扩散对流方程

章 公 亮
（西安 空间物理研究所）

摘 要

太阳宇宙线在行星际空间的传播，包括行星际不规则磁场中的扩散和太阳风对流这两种物理过程. 应用量纲分析法可以解出现有许多能化为贝塞尔函数的方程，得到与常用分离变量法完全相同的结果. 为了求出均匀无限介质中扩散对流方程的解，我们引入反映粒子扩散和对流特征的无量纲参数. 在扩散为主导的情况下，解在形式上类似于以对流速度运动的源的扩散，另一对流修正项可按对流参数的幂级数展开，其系数是扩散参数的广义超几何函数组成的级数. 这种解的物理概念清楚，适用于讨论中等能量（$E_p \geqslant 10^1$ MeV）以上太阳宇宙线上升期特性.

一、引 言

随着空间探测事业的发展，近年来太阳宇宙线粒子在行星际空间传播问题的研究已有了很大发展[7]. 传播方程已经确立了，并且已提出好多种简化模型去求解，以解释太阳宇宙线事件的时间变化特性. 我们研究太阳宇宙线传播问题，关心的是对观测资料进行传播改正，消去粒子在空间传播所引起的强度变化，求得粒子在太阳上的发射谱，在此基础上进行相关统计，研究决定太阳宇宙线事件发射谱的太阳活动因素，探讨粒子的加速机制，更好地预报太阳质子事件. 经过调查研究，我们选定均匀无限介质中的扩散对流方程作为传播改正的工作模型，在文献中并没有现成的解析解，需要从数学上自行推导.

根据伟大领袖和导师毛主席的教导，我们遵循“**由特殊到一般，又由一般到特殊**”这样两个认识过程去进行工作. 首先分析了已经解出的许多传播方程的特点，找出其共同性，归纳求解了一种普遍形式的传播方程. 然后以上述普遍解法为指导，求出均匀有限介质中扩散对流方程上升期渐近解的第一级近似，从中得到用量纲分析法求解传播方程的启示. 用量纲分析法求解传播问题迄今尚未有人用过，为了从实践中取得经验，我们又从解简单的特殊形式的方程入手，逐步扩大到求解更复杂的普遍形式的传播方程，得到与常规分离变量法完全相同的结果. 在此基础上，进一步用量纲分析的一般方法解出工作模型这一特殊类型的方程，其第一级近似正是有限介质中传播方程的渐近解. 经过这样多次

本文1977年8月16日收到.

“由特殊到一般，又由一般到特殊”的过程，也就是**“实践、认识、再实践、再认识”**的过程，终于解决了均匀无限介质中扩散对流方程的求解问题[1].

这篇报告，主要是介绍量纲分析解法，导出解的形式. 对于传播模型的评论以及联系观测数据讨论传播效应，进行传播改正等问题留待以后再进行介绍.

在讨论量纲分析法前，简单介绍一下传播方程. 宇宙线粒子在行星际空间一方面受到行星际不规则磁场的作用，轨道发生随机变化而形成扩散运动，另一方面太阳风向外膨胀时又带动宇宙线粒子发生对流运动. 从带电粒子运动的福克-普朗克方程可以推导出扩散对流方程[7]. 由于行星际存在大尺度的规则磁场，平行及垂直于磁场方向的扩散是不相同的，因而传播是各向异性的. 为简单起见，这里只讨论各向同性的扩散，即扩散是对太阳中心球对称的. 因为各向异性传播在一定条件下经过分离变量，其径向部分就归结为各向同性方程，只要把各向同性方程讨论清楚了，就不难求得整个方程的解. 在球对称的情况，传播方程是[7]:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2K\frac{\partial U}{\partial r}\right)-V\frac{\partial U}{\partial r}-\frac{2CV}{r}U-\frac{\partial U}{\partial t}=0, \tag{1}$$

其中 t 是时间，r 是离日心距离，U 是粒子数密度，行星际大尺度磁场及太阳风均假设沿 r 方向，K 为平行于磁场方向的扩散系数，可以是 r 的函数，C 常称为康普顿-盖丁因子，与粒子的能量及能谱形式有关，C 及太阳风速 V 均取为常数. 方程式的第一项为扩散效应，后两项为对流效应. 这是两种互相区别而又互相联系的物理过程，它们在事件发展的过程中是不平衡的. 粒子能量越高，扩散系数越大，扩散效应就比较重要，相反能量低的粒子，扩散系数小，对流效应就比较重要. 另外在太阳宇宙线上升期，粒子还没有来得及散开，空间梯度大，扩散效应起主导作用，而在宇宙线衰减后期，粒子空间梯度变小，对流效应就起主导作用. 这就是扩散和对流这两种因素在事件发展过程中的对立统一的关系.

在太阳宇宙线传播情形，初始条件可取为 $t=0$ 时，在太阳表面 $r=r_0$ 处（r_0 是太阳半径）有一 δ 函数脉冲发射 $\mathscr{N}$ 个粒子:

$$U(r,t=0)=\frac{\mathscr{N}}{4\pi r^2}\delta(r-r_0), \tag{2}$$

因为我们只讨论上升期特性，取这种初始条件就足够了. 在传播问题研究的早期工作中，都认为在 $r>r_E$ 处（r_E 为太阳至地球距离），有一扩散边界. 这纯粹是为了解释事件的指数衰减而引入的假设，并无物理根据，因此我们只讨论在无限介质中的传播. 另外还限定在原点（太阳中心）解是有限的，即

$$\underset{r\to 0}{U}(r,t)=\text{有限值}. \tag{3}$$

传播方程中的扩散系数 K 可以从行星际磁场湍流功率谱定出[7]，但它的空间分布还不大清楚，通常假设简单的分布形式，以期能求出解析解，这就形成种种传播模型. 下面我们将用量纲分析法，来求它们的解.

二、推广扩散方程的解

分析已经解出的许多传播模型，可以看到它们有一个共同特点，即它们的解都用贝塞

尔函数来表示,这一类方程可归纳成如下形式[1]:

$$r^2\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+Ar\frac{\partial U}{\partial r}+BU-r^{2-\beta}\frac{\partial U}{\partial \tau}=0, \tag{4}$$

其中 $\tau=K_0t$, $K=K_0r^\beta$, A, B, K_0, β 均为常数. (4) 式的解很象扩散方程的解,因此称 (4) 式为推广扩散方程. 它包括均匀及非均匀介质中的扩散[3,8], $K=K_0r$ 介质中的各向异性扩散[5]及扩散对流[4,6]等传播模型.

现在用量纲分析法来求上述方程的解. 先讨论最简单的情形——均匀介质中的扩散:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r}-\frac{1}{K}\frac{\partial U}{\partial t}=0, \tag{5}$$

取初始条件为 $r_0\ll r$ 的近似.

$$U(r,t=0)=\lim_{r\to 0}\frac{\mathcal{N}}{4\pi r^2}\delta(r), \tag{6}$$

由量纲分析知:

$$U:[L^{-3}],\ K:[L^2T^{-1}].$$

因此物理量 r^3U 或 $(Kt)^{3/2}U$ 是无量纲数,它只能是另外一些无量纲数组成的无量纲函数. 由于初始条件 (6) 只给出一个无量纲粒子数 $\mathcal{N}$, 而物理量 r, t, K 只能组成一个无量纲参数 $Z=r^2/Kt$. 可以断定无量纲数 r^3U 或 $(Kt)^{3/2}U$ 只是无量纲参数 Z 的函数,即

$$U=\frac{A_0}{(Kt)^{3/2}}\phi(Z).$$

ϕ 满足方程式:

$$4Z^2\phi''+(6Z+Z^2)\phi'+\frac{3}{2}Z\phi=0. \tag{7}$$

(7) 式为合流超几何方程,有两组解[12]:

$$e^{-Z/4}{}_1F_1\left[0,\frac{3}{2},\frac{Z}{4}\right],\ Z^{-1/2}e^{-Z/4}{}_1F_1\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{Z}{4}\right].$$

${}_1F_1$ 为合流超几何函数,考虑到在 $r\to 0$ 时解应为有限[条件 (3)] 取前一组解:

$$U=\frac{A_0}{(4Kt)^{3/2}}\exp\left[-\frac{r^2}{4Kt}\right].$$

上式两边乘以 rdr^2, 并从 0 到∞积分,以初始条件 (6) 代入,可求得 A_0 值,从而解为

$$U=\frac{\mathcal{N}}{(4\pi Kt)^{3/2}}\exp\left[-\frac{r^2}{4Kt}\right]. \tag{8}$$

这里我们通过一个简单的例子,说明怎样用量纲分析法求解传播方程.

现在我们讨论更普遍的情况,即求解推广扩散方程 (4), 分析一下方程的量纲, 可知 A, B, β 都是无量纲常数, τ 的量纲为 $[L^{2-\beta}]$. 考虑到初始条件 (2) 中包括 r_0, U 应该是 r_0, r, t, K 四个有量纲数组成的函数. 如果引入一个新的无量纲变数 r^3U 或 $\tau^{3/(2-\beta)}U$, 那么它必定是上述四个有量纲数组成的若干无量纲参数的函数. 这四个量中只包含两个基本的测量单位 $[L, T]$, 根据量纲分析的 π 定理, 它只能组成两个独立的无量纲参数. 因而解可以写成如下形式:

$$\begin{cases} U = \left[\dfrac{1}{(2-\beta)\tau}\right]^{3/(2-\beta)} \phi(X, Z), \\ X = \dfrac{r_0^{2-\beta}}{(2-\beta)^2\tau}, \quad Z = \dfrac{r^{2-\beta}}{(2-\beta)^2\tau}, \end{cases} \tag{9}$$

X, Z 是两个无量纲变数,考虑到 $X \ll Z$, 因而 ϕ 可按 X 的幂级数展开:

$$\phi(X, Z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n X^{\alpha+n} f_n(Z), \tag{10}$$

代入方程式 (4) 求得 f_n 的常微分方程式为:

$$f_n'' + \left[1 + \left(1 + \frac{A-1}{2-\beta}\right)Z^{-1}\right] f_n' + \left[\left(n + \alpha + \frac{3}{2-\beta}\right)Z^{-1} + \frac{B}{(2-\beta)^2} Z^{-2}\right] f_n = 0. \tag{11}$$

上式可化为合流超几何方程,其解为[12]:

$$e^{-Z}Z^{-\lambda}{}_1F_1[a, b, Z]. \tag{12}$$

参数 a, b, λ 决定于:

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{A-1}{2(2-\beta)} \mp \dfrac{1}{2(2-\beta)}\sqrt{(A-1)^2 - 4B}, \\ b = 1 + \dfrac{A-1}{2-\beta} - 2\lambda = 1 \pm \dfrac{1}{2-\beta}\sqrt{(A-1)^2 - 4B}, \\ a = -(n+\alpha) + b + \lambda - \dfrac{3}{2-\beta}. \end{cases} \tag{13}$$

因而 (4) 式的解为:

$$U = \left[\frac{1}{(2-\beta)^2\tau}\right]^{3/(2-\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} A_n X^{n+\alpha} e^{-Z} Z^{-\lambda}{}_1F_1[a, b, Z], \tag{14}$$

系数 A_n 及 α 要由初始条件 (2) 决定. 当 $t \to 0$ 时, $Z \to \infty$, 以合流超几何函数 ${}_1F_1$ 的渐近公式[12]代入[14],两边乘以

$$r^{2+(2-\beta)[b+\lambda-3/(2-\beta)]}\exp[-r^{2-\beta}]dr,$$

并从 0 到∞积分,比较两边级数的系数就求得

$$\begin{cases} \alpha = b + \lambda - \dfrac{3}{2-\beta} \quad \text{或}\ a = -n, \\ A_n = \dfrac{\mathcal{N}}{4\pi}\dfrac{2-\beta}{\Gamma(b)}\dfrac{(-1)^n}{n!}, \end{cases} \tag{15}$$

$\Gamma(b)$ 是伽傌函数, 把 α 及 A_n 的值代人 (14) 式, 根据超越函数公式[2] 将级数化为贝塞尔函数,再以 (9) 式中 X, Z 以及 (13) 式中的 λ 和 b 代入,最后求得 U 的解为:

$$\begin{cases} U = \dfrac{\mathcal{N}}{4\pi r_0^{1+\beta}}\left(\dfrac{r_0}{r}\right)^{(A-1)/2} \dfrac{1}{(2-\beta)\tau}\exp\left[-\dfrac{r^{2-\beta} + r_0^{2-\beta}}{(2-\beta)^2\tau}\right] \cdot I_\eta\left[\dfrac{2(rr_0)^{(2-\beta)/2}}{(2-\beta)^2\tau}\right], \\ \eta = \pm\dfrac{1}{2-\beta}[(A-1)^2 - 4B]^{1/2}, \end{cases} \tag{16}$$

其中 I_η 是第一类修正贝塞尔函数,考虑到条件 (3), 只取 $\lambda < 0$, 即 $\eta > 0$ 的解.

这个解很好地概括了现已解出的许多特殊传播模型,例如:

1. 均匀介质中的扩散，$A=2$，$B=\beta=0$[3]

$$U=\frac{\mathscr{N}}{4\pi(rr_0)^{1/2}}\frac{1}{2Kt}\exp\left[-\frac{r^2+r_0^2}{4Kt}\right]\cdot I_{1/2}\left[\frac{rr_0}{2Kt}\right];$$

2. 非均匀介质中的扩散，$A=2+\beta$，$B=0$[8]

$$U=\frac{\mathscr{N}}{4\pi(rr_0)^{(1+\beta)/2}}\frac{1}{(2-\beta)K_0t}\exp\left[-\frac{r^{2-\beta}+r_0^{2-\beta}}{(2-\beta)^2K_0t}\right]\cdot I_{(1+\beta)/(2-\beta)}\left[\frac{2(rr_0)^{(2-\beta)/2}}{(2-\beta)^2K_0t}\right];$$

3. 非均匀介质中的扩散对流，$A=3-\frac{V}{K_0}$，$B=-\frac{2CV}{K_0}$，$\beta=1$[4]

$$U=\frac{\mathscr{N}}{4\pi r_0^2K_0t}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1-\frac{V}{2K_0}}\exp\left[-\frac{r+r_0}{K_0t}\right]\cdot I_\eta\left[\frac{2(rr_0)^{1/2}}{K_0t}\right],$$

$$\eta=2\left[\left(1-\frac{V}{2K_0}\right)^2+\frac{2CV}{K_0}\right]^{1/2};$$

4. 非均匀介质中的各向异性扩散，$K_{/\!/}=K_0r$，$K_\perp=K_1r$，$A=3$，$B=-\frac{K_1}{K_0}(l+l^2)$，$\beta=1$[5]

$$U=\frac{\mathscr{N}}{4\pi rr_0K_0t}\exp\left[-\frac{r+r_0}{K_0t}\right]\cdot I_\eta\left[\frac{2(rr_0)^{1/2}}{K_0t}\right],$$

$$\eta=2\left[1+\frac{K_1}{K_0}(l+l^2)\right]^{1/2},$$

其中 l 是分离变量常数.

从这一节的讨论可以看出,应用量纲分析法可以求解太阳宇宙线传播方程,得到的结果与常规分离变量法完全相同.

三、均匀无限介质中扩散对流方程的解

现在用以上量纲分析的一般方法来求解太阳宇宙线在均匀无限介质中的扩散对流方程:

$$r^2\frac{\partial^2U}{\partial r^2}+2r\frac{\partial U}{\partial r}-\frac{r^2}{K}\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{Vr^2}{K}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{2CVr}{K}U. \tag{17}$$

因这个方程的右边两项不能化为 (4) 式的形式,也难用常规的积分变换法求解[1]. 在有限介质中的传播已有人解出过[11],尽管边界缺乏物理依据,但可借此求出渐近解. 如有边界存在,在太阳宇宙线上升期,大多数粒子未到达边界,边界对传播影响不大,可以认为介质是无限的. 在推广扩散方程的情形,我们普遍论证过,把有限介质中的解,令边界趋于无穷远,求其渐近解,得到与直接求解无限介质中的传播方程完全相同的结果[1]. 我们用这种方法求得均匀有限介质中扩散对流方程上升期渐近解的第一级近似[1],在 $r_0\ll r$ 的条件下有:

$$\begin{cases} U = \dfrac{\mathcal{N}}{(4\pi Kt)^{3/2}} \exp\left[-Z + H - H^2 \dfrac{Z}{4}\right] \cdot [1 + (2C-1)Hf(Z) + \cdots], \\ f(Z) = -\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) Z^{-1/2} {}_1F_1\left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}, Z\right] \\ \qquad + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{4n+3}{(2n+1)(2n+2)} \dfrac{\Gamma\left(n+\dfrac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(2n+\dfrac{5}{2}\right)} Z^n {}_1F_1\left[n+1, 2n+\dfrac{5}{2}, Z\right], \\ Z = \dfrac{r^2}{4Kt}, H = \dfrac{Vr}{2K}, \end{cases} \tag{18}$$

其中 Z 是我们引入的反映粒子扩散过程的特征参数，称为“扩散参数”，H 是研究宇宙线调制问题时常用的“调制参数”，两者都是无量纲参数．H 是衡量扩散与对流这两种物理过程关系的物理量，$H<1$ 时，扩散起主导作用；反之，$H>1$ 时，则对流起主导作用．H 的大小取决于粒子的能量，能量高的粒子扩散系数大，H 参数就小；而能量低的粒子扩散系数小，H 参数就大．在地球轨道以内，在一般太阳风速条件下，按扩散系数的测定值计算[7]，能量大于 20 MeV 的质子是满足 $H<1$ 的条件的．如忽略对流效应，(18) 式就变为纯扩散传播方程的解(8)．当对流不起主导作用时，解似乎可按 H 的幂级数展开，其系数为扩散参数 Z 的函数．我们正是由此得到启发，着手研究用量纲分析法求解传播问题的[1]．

现在讨论求解问题，为了减少一个无量纲参数，初始条件取 $r_0 \ll r$ 的近似，只要讨论问题的空间离太阳的距离远大于太阳半径，这种近似是允许的．从上节求出的解也可以看出，在纯扩散的情形，初始条件中略去 r_0 求得的解与考虑初始条件 (2) 最后从解中略去 r_0 所得的结果完全相同．下面我们还会看到在均匀介质中扩散对流传播的情况也是一样的．

根据量纲分析原理，经我们多次试验，证明如在解中提出一个指数函数，则剩下的函数 ϕ 就比较简单．我们取：

$$U = \left(\frac{1}{4Kt}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{(r-Vt)^2}{4Kt}\right] \phi(r,t). \tag{19}$$

这时 ϕ 的方程只包括一项对流项：

$$r^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + r \frac{\partial \phi}{\partial r}\left(2 - \frac{r^2}{Kt}\right) - \frac{r^2}{K}\frac{\partial \phi}{\partial t} = (2C-1)\frac{Vr}{K}\phi.$$

上节求出的均匀介质中扩散方程的解可改写为：

$$U = \left(\frac{1}{4Kt}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{(r-r_0)^2}{4Kt}\right] f\left(\frac{rr_0}{Kt}\right),$$

如不考虑函数 ϕ 及 f，这两个解在形式上有相似之处．当不存在对流时，扩散源在 $r=r_0$ 处，如存在对流，扩散源象是以对流速度 V 向外运动．因而引入指数项的物理概念是很清楚的．化为无量纲数 H 和 Z，则刚好是 (18) 式中指数函数的变元．

现在求函数 ϕ 的解，它应该是四个有量纲数 r，t，K 和 V 的函数，但基本测量单位只有两个：$[L]$ 及 $[T]$．按量纲分析原理，只能组成两个独立的无量纲参数．由于我们讨论的是对流对扩散的影响，在对流不占主导地位的情况下，ϕ 可按一个包括对流效应的无

量纲参数的幂级数来展开,其系数是扩散参数 Z 的函数:

$$\phi = \sum_{l=0}^{\infty} X^l f_l(Z), \tag{20}$$

参数 X 有好几种组合法,但最后都归结为包括时间 t 的无量纲参数:

$$X = (2C-1)V\left(\frac{t}{K}\right)^{1/2}.$$

也就是说,在太阳宇宙线事件的过程中,反映对流与扩散关系的特征量应该是包括时间 t 的参数,因为两者谁占主导是随时间而变化的,传播时间越长,对流效应越显得重要. 我们称 X 参数为"对流时间参数",同样可用另一个反映扩散对流空间关系的参数 Y,我们称之为"对流空间参数":

$$Y = (2C-1)\frac{Vr}{2K},$$

函数 ϕ 称为扩散对流函数. 系数 f_l 的方程是:

$$f_l'' + \left[-1 + \frac{3}{2}Z^{-1}\right]f_l' - \frac{l}{2}Z^{-1}f_l = \frac{1}{2}Z^{-3/2}f_{l-1}. \tag{21}$$

这是一个二阶非齐次方程,其齐次方程是典型的合流超几何方程,其解为[12]:

$${}_1F_1\left[\frac{l}{2}, \frac{3}{2}, Z\right];\ Z^{-1/2}{}_1F_1\left[\frac{l-1}{2}, \frac{1}{2}, Z\right].$$

用常用的系数变换法可求出非齐次方程的一级近似,但要求高级近似就比较困难,以下用多重级数法求解. 取

$$f_l(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_l^{(k)} Z^{\alpha_l+k},$$

先讨论一下指数 α_l, 齐次方程的指数为

$$\alpha_l = -\frac{1}{2},\ 0.$$

从(21)式可知非齐次方程的指数为

$$\alpha_l = \alpha_{l-1} + \frac{1}{2}.$$

因而各级近似解的指数为

$$\alpha_l = \frac{m}{2} \quad m = -1, 0, 1, 2, \cdots, l.$$

如考虑到条件(3), $r \to 0$ 时解应有限,舍去 $\alpha_l < 0$ 的解. 对应于不同的 α_l 值, $A_l^{(k)}$ 就有不同的值,系数 A 应是 α_l 即 m 的函数. 这样可以把全部有意义的解写成如下形式:

$$f_l(Z) = \sum_{m=0}^{l} Z^{m/2} \sum_{k=0}^{\infty} A(n, m, k) Z^k, \tag{22}$$

$$n = l - m.$$

代入 f_l 的方程(21), 求得 $A(n, m, k)$ 的递推公式:

$$\left(\frac{m}{2}+k\right)\left(\frac{m+1}{2}+k\right)A(n, m, k) - \left(\frac{n}{2}+m+k-1\right)A(n, m, k-1)$$

$$= \frac{1}{2} A(n, m-1, k).$$

从而解出：

$$\left\{\begin{array}{l} A(n, m, k) = A_n a(n, m) \dfrac{\left(\dfrac{n}{2}+m\right)_k}{\left(\dfrac{m+2}{2}\right)_k \left(\dfrac{m+3}{2}\right)_k} S(n, m, k), \\ a(n, m) = \dfrac{\left(\dfrac{n}{2}\right)_m}{(m+1)!}, \quad n \neq 0. \\ a(0, m) = \dfrac{2(m-1)!}{(m+1)!}, \quad m \neq 0 \\ (b)_k = b(b+1)\cdots(b+k-1), \\ S(n, m, k) = \displaystyle\sum_{k_1=0}^{k} \dfrac{S(n, m-1, k_1)}{\left(\dfrac{n}{2}+m-1+k_1\right)\left(\dfrac{m}{2}+k_1\right)}, \\ S(n, 0, k) = S(0, 1, k) = 1. \end{array}\right. \tag{23}$$

系数 A_n 要由初始条件来定，当 $t \to 0$ 时，$Z \to \infty$，因而要求 $f_l(Z)$ 的渐近值. 引入

$$f(n, m, Z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\dfrac{n}{2}+m\right)_k}{\left(\dfrac{m+2}{2}\right)_k \left(\dfrac{m+3}{2}\right)_k} S(n, m, k) Z^k,$$

可以证明正项级数 $f(n, m, Z)$ 是收敛的[1]. 交换级数求和顺序，求得

$$f(n, m, Z) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{S(n, m-1, k_1)}{\left(\dfrac{n}{2}+m-1+k_1\right)\left(\dfrac{m}{2}+k_1\right)} Z^{k_1}$$

$$\cdot \frac{\left(\dfrac{n}{2}+m\right)_{k_1}}{\left(\dfrac{m+2}{2}\right)_{k_1} \left(\dfrac{m+3}{2}\right)_{k_1}} {}_2F_2\left[\frac{n}{2}+m+k_1, 1; \frac{m+2}{2}+k_1, \frac{m+3}{2}+k_1; Z\right].$$

由广义超几何函数 ${}_2F_2$ 的渐近公式[9,10]可以证明在 $t=0$ 时，

$$\frac{\mathcal{N}}{4\pi r^2} \delta(r) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right)}{r^3} \exp(H) \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l Y^l, \tag{24}$$

其中

$$\sigma_l = \sum_{m=0}^{l-1} \frac{A_{l-m}}{\Gamma\left(\dfrac{l-m}{2}\right)} \left(\frac{1}{2}\right)^m S(l-m, m, \infty) + A_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{l-1} S(0, l, \infty). \tag{25}$$

(24) 式两边乘以

$$dr \cdot r^2 \exp[-H - Y^2] = \frac{1}{2} dY^2 \cdot Y^{-2} r^3 \exp[-H - Y^2],$$

并从 0 到 ∞ 求积分得:

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sigma_l\Gamma\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{\mathcal{N}}{\pi^{3/2}}. \tag{26}$$

从 (24) 知 $r\neq 0$ 时, $\delta(r)=0$, 因而

$$\sigma_l=0,\ l=1,2,3\cdots$$

从 (25) 式可知,当 $l=0$ 时只有 $m=0$ 一项,故

$$\sigma_l \underset{l\to 0}{=} A_0\Big/\Gamma\left(\frac{l}{2}\right).$$

因而 (26) 式给出

$$A_0=\mathcal{N}\pi^{-3/2}, \tag{27}$$

即扩散方程解的系数. 其余各项系数可由递推公式 $\sigma_l=0(l=1,2,3\cdots)$ 给出,如

$$A_1=-\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)A_0,\quad A_2=\frac{1}{6}\pi^2A_0,\cdots$$

以 A_1 的值代入 (23) 式,得解的第一级近似:

$$U=\frac{\mathcal{N}}{(4\pi Kt)^{3/2}}\exp\left[-Z+H-\frac{H^2}{Z}\right]\left\{1+(2C-1)H\left[-\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.\cdot Z^{-1/2}{}_1F_1\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},Z\right)+{}_2F_2\left(1,1;2,\frac{3}{2};Z\right)\right]\right\},$$

由广义超几何函数 ${}_2F_2$ 的展开公式[5,6]可以证明上式与 (18) 式完全相同,这说明我们的方法是正确的.

到此为止,我们已全部解决求解问题. 关于解的收敛性问题,我们曾经证明过[1],级数 $S(n,m,\infty)$、$f(n,m,Z)$、$f_l(Z)$ 和级数 $\sum_{m=0}^{\infty}Y^mf(n,m,Z)$ 都是收敛的. 但级数 $\sum_{l=0}^{\infty}X^lf_l(Z)$ 的收敛性问题一时难以用解析形式证明,在 X 参数比较大时,级数可能会发散,要通过数值计算才能确定其收敛半径.

四、结　论

我们用量纲分析法求出均匀无限介质中扩散对流方程的解析解,它可以用反映扩散和对流的无量纲参数来表示:

$$U=\frac{\mathcal{N}}{(4\pi r^2)^{3/2}}Z^{3/2}\exp\left[-Z+H-\frac{H^2}{4Z}\right]\phi(X,Z), \tag{28}$$

$$\phi(X,Z)=\sum_{l=0}^{\infty}X^l\sum_{m=0}^{l}A(n)a(n,m)Z^{m/2}$$
$$\cdot\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{n}{2}+m\right)_k}{\left(\frac{m+1}{2}\right)_k\left(\frac{m+2}{2}\right)_k}S(n,m,k)Z^k\right], \tag{29}$$

其中 $n = l - m$，系数 $A(0) = 1$，其余各项由递推公式 (30) 求得

$$\sum_{m=0}^{l-1} \frac{A(l-m)}{\Gamma\left(\frac{l-m}{2}\right)} \left(\frac{1}{2}\right)^m S(l-m, m, \infty) + A(0)\left(\frac{1}{2}\right)^{l-1} S(0, l, \infty) = 0, \tag{30}$$

系数 $a(n, m)$ 及 $S(n, m, k)$ 分别由公式组 (31) 决定:

$$\begin{cases} a(n, m) = \dfrac{\left(\dfrac{n}{2}\right)_m}{(m+1)!}, & n \neq 0 \\ a(0, m) = \dfrac{2(m-1)!}{(m+1)!}, & m \neq 0 \\ S(n, m, k) = \displaystyle\sum_{k_1=0}^{k} \frac{S(n, m-1, k_1)}{\left(\dfrac{n}{2} + m - 1 + k_1\right)\left(\dfrac{m}{2} + k_1\right)}, \\ S(n, 0, k) = S(0, 1, k) = 1, \end{cases} \tag{31}$$

这组解适用于离太阳距离较远空间 ($r \gg r_0$)，对流效应不起主导作用的太阳宇宙线上升期，解的形式与忽略对流时扩散方程的解相似，对流只是对扩散起修正影响，解的物理概念也比较清楚.

这个工作有待于联系观测数据，进行数值计算，讨论太阳宇宙线在行星际空间的传播特性.

参　考　资　料

[1] 章公亮，太阳宇宙线传播方程的解法，(内部报告，1974).
[2] 爱尔台里主编，«高级超越函数»，(科学技术出版社，1958).
[3] L. F. Burlaga, *J. Geophys. Res.*, V. 72(1967), 4449.
[4] L. A. Fisk, W. I. Axford, *J. Geophys. Res.*, V. 73(1968), 4396.
[5] J. Feit, *J. Geophys. Res.*, V. 74(1969), 5579.
[6] M. A. Forman, *J. Geophys. Res.*, V. 76(1971), 759.
[7] J. R. Jokipii, *Rev. Geophys. Space Phys.*, V. 9(1971), 27.
[8] S. M. Krimigis, *J. Geophys. Res.*, V. 70(1965), 2943.
[9] Y. L. Luke, *Special Functions and Their Approximations*, V. 1, V. 2, (1969).
[10] Y. L. Luke, *Integrals of Bessel Functions*, (1962).
[11] J. E. Lupton, E. C. Stone, *J. Geophys. Res.*, V. 78(1973), 1007.
[12] L. J. Slater, *Confluent Hypergeometric Functions*, (1960).
[13] G. N. Watson, *A Treatise on The Theory of Bessel Functions*, (1952).

DIMENSIONAL METHOD TO SOLVE THE DIFFUSION CONVECTION EQUATION OF SOLAR COSMIC RAYS

CHANG KONG-LIANG
(*Institute of Space Physics, Sian*)

ABSTRACT

Physical processes of the propagation of the solar cosmic rays in the interplanetary space include the diffusion in interplanetary disordered magnetic fields and the convection in solar winds. Dimensional method can be applied to solve those equations convertible into Bessel equation, the results obtained are identical with those solved by the commonly used separate variable method. In order to derive an analytic solution to the diffusion convection equation in an unbounded, uniform medium, two dimensionless parameters reflecting the diffusion and convection characteristics of the particles are introduced. In the diffusion dominated case, the solution is similar in form to the diffusion of a source moving with the convection velocity and is modified by another convection term, which can be expanded into a power series of the convection parameter with coefficients composed of the generalized hypergeometric function series of the diffusion parameter. This solution has a clear physical meaning, and can suitably be used in the discussion of the rise phase characteristics of the solar cosmic rays from medium to high energies ($E_p \geqslant 10^1$ MeV).