第 1 卷 第 1 期 高能物理与核物理 Vol. 1, No. 1
1977 年 11 月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS November, 1977

一般规范理论中子群的对偶荷
——$SU(2)$ 与 $SO(3)$ 规范场中的磁单极

吴詠时 陈 时 杜东生 郭汉英
（中国科学院物理研究所） （中国科学院高能物理研究所）

摘 要

本文用纤维丛理论处理 $SU(2)$ 与 $SO(3)$ 破缺规范理论中子群 $U(1)$ 的磁单极问题. 导出了存在磁单极时电磁势的一般表达式，根据电磁势与场强的通常关系，自然得到 'tHooft 电磁场强的定义. 同时，根据纤维丛理论，本文阐述了对目前在一些文献中有观点分歧的问题的看法. 认为:

1. 一般而言，描述 $SU(2)$ 与 $SO(3)$ 破缺规范理论中的磁单极，除了 $SU(2)$ 或 $SO(3)$ 规范势外，还需要一个么模的 Higgs 场，来标记同位旋空间的电荷（对称性破坏后剩余的 $U(1)$ 对称性生成元）方向；

2. 磁单极的存在只要求相应的 $SU(2)$ 主丛或 $SO(3)$ 主丛可以约化为 $U(1)$ 或 $SO(2)$ 主丛，并不要求相应的 $SU(2)$ 或 $SO(3)$ 规范势也一定要约化为 $U(1)$ 或 $SO(2)$ 规范势；

3. 通常关于磁单极的数值仅依赖于 Higgs 场拓扑性质的结论，是有条件的. 对于 $SU(2)$ 或 $SO(3)$ 的乘积丛是对的，而对于 $SO(3)$ 非乘积丛的情形需要另行考虑.

一、引 言

我们知道，在通常的电磁理论中，电磁场可作为电荷位相变换的 $U(1)$ 群的规范场，磁单极就是电荷的对偶荷. 然而，无论从弱作用和电磁作用的统一理论或是强作用的对称性理论看来，电荷规范群不过是某个更大对称群的某个 $U(1)$ 子群. 因此，自然需要讨论这类一般规范理论中 $U(1)$ 子群的磁单极问题.

最简单的情形就是 $SU(2)$ 和 $SO(3)$ 破缺规范理论. 自从 'tHooft[1] 和 Polyakov[2] 分别求出相应的磁单极孤粒子解，并得到简单的量子化条件以后，对这类问题的探讨很多. 但是，有些问题至今仍然存在，看法也不尽相同[3-7]. 例如，尽管[1]中给出了 $SO(3)$ 规范理论中规范不变的电磁场强张量的定义. 但是，为什么这样定义？相应的电磁势又是什么？并没有给出答案. 又如，$SU(2)$ 或 $SO(3)$ 规范势场的磁单极是否一定与 Higgs 场相

本文 1977 年 4 月 7 日收到. 东方晓同志参加了部分工作.

联系？存在磁单极时，$SU(2)$ 或 $SO(3)$ 规范势是否一定可以约化为 $U(1)$ 规范势？磁单极的数值是否仅仅依赖于 Higgs 场的拓扑性质？对这些问题的看法也很不一致.

本文采用纤维丛理论来处理 $SU(2)$ 与 $SO(3)$ 破缺规范理论中 $U(1)$ 子群的磁单极问题.

不妨回顾一下 $U(1)$ 规范场-电磁场中磁单极的纤维丛描述[6,8,9]. 除去磁单极世界线之外的时空区域记为 M^4, 磁单极的电磁场可用一个以 M^4 为底, $U(1)$ 为结构群的 $U(1)$-主丛 $P[M_4, U(1)]$ 来描写. 在某惯性系中考虑一个类空的二维球面 S^2_M, 当底 M^4 限制于 S^2_M, 作为 $P[M^4, U(1)]$ 的子丛, 有相应的 $U(1)$-主丛 $P[S^2_M, U(1)]$. S^2_M 中所包围的磁荷就是这个 $U(1)$-主丛 $P[S^2_M, U(1)]$ 的第一陈类,它刻划了该 $U(1)$-主丛的规范型.

对于规范群为 G [例如, 本文讨论的 $U(2)$ 或 $SO(3)$] 的破缺规范理论, 除了要用以 M^4 为底, G 为结构群的主丛 $P(M^4, G)$ 来描写 G 规范场之外, 为了描写 G 规范理论中相应于某一子群 H [本文讨论的是 $U(1)\cong SO(2)$ 的情况] 的对偶荷还需要 $P(M^4, G)$ 的一个 H-子丛 $P'(M^4, H)$, 以便用 M^4 限止于 S^2_M 时它的子丛 $P'(S^2_M, H)$ 的拓扑性质来确定对偶荷. 这样, 描写 G 规范场中子群的 H 的对偶荷, 就归结为研究主丛 $P(M^4, G)$ 及其子丛 $P'(M^4, H)$, 以及它们的联络(规范势)之间的关系等问题.

在第二节中, 我们重述纤维丛理论, 特别是联络论中的几个定理, 给出本文考查上述问题的基本线索, 而方法本身是带有普遍性的, 并不仅限于 $SU(2)$ 或 $SO(3)$ 规范场的情形. 在第三、四节中, 我们分别处理 $SO(3)$ 与 $SU(2)$ 规范场的情形. 给出存在磁单极时电磁势与电磁场强的一般表达式. 在第五节中, 我们指出, 此时磁单极相应于对称性破坏后剩余的 $U(1)$ 对称性, 在同位旋空间中, 后者的方向需用一个唯象的 Higgs 场的方向来描写, 那么, 在这类理论中, 磁单极当然要与 Higgs 场相联系, 而一旦取剩余 $U(1)$ 对称的方向为 Higgs 场的方向时, 我们得到的电磁势和场强的一般表达式就自然给出 t'Hooft 电磁场强的定义. 在第六节中考查磁单极数值与 Higgs 场拓扑性质的关系; 指出, 通常关于磁单极的数值仅依赖于 Higgs 场拓扑性质, 而与杨-Mills 场无关的结论是有条件的. 对应于 $SU(2)$ 与 $SO(3)$ 的乘积丛, 或者杨-Mills 场本身没有奇异性时是对的, 而对于非乘积丛的情形则需要另行考虑. 最后, 对有关问题进行简易的讨论.

二、纤维丛理论的几个定理

从规范场纤维丛的理论来看, 电磁场的磁单极相应于 $U(1)$ 主丛的第一陈类. 是一种拓扑性的量子数. 它刻划了电磁场的拓扑(同伦)类型(即规范型)[6,9]. 类似地, $SU(2)$ 或 $SO(3)$ 规范场中 $U(1)$ 子群的磁单极问题, 同样可以归结为相应的 $SU(2)$ 或 $SO(3)$ 主丛的某个 $U(1)$ 子丛及其联络, 以及该子丛的第一陈类与拓扑(同伦)分类等问题.

在纤维丛理论中, 这些问题已在一般形式中予以解决. 下面, 我们重述纤维理论, 特别是联络论中的几个定理, 并给出本文考查有关问题的基本线索.

设 M 为一流形, G 是一李群, 构造一个以 M 为底, G 为结构群的主丛 $P(M, G)$. 假定群 G 的闭子群 H, 那么, 在什么条件下 G-主丛 $P(M, G)$ 有以 H 为结构群的子丛 $P'(M, H)$? 又如何刻划 G-主丛 $P(M, G)$ 的 H-子丛 $P'(M, H)$? 下面的两个定理回答了这些问题[10].

定理 1. G-主丛 $P(M, G)$ 有 H-子丛 $P'(M, H)$ 的充分必要条件是，存在M的开复盖 $\{U_\alpha\}$，使得 G-主丛中所有的联接函数 $S_{\alpha\beta}$ 都取值在子群H中.

定理 2. G-主丛 $P(M, G)$ 有 H-子丛 $P'(M, H)$ 的充分必要条件是，与主丛 $P(M, G)$ 相配，并以齐性空间 G/H 为纤维的配丛 $E(M, G/H, G, P)$ 允许一截面 σ: $M \to E = P/H$. 而且，H-子丛 P' 与配丛 E 的截面 σ 一一对应.

应该指出，根据定理 1，G-主丛 $P(M, G)$ 有 H-子丛的条件是 $P(M, G)$ 的结构群G可约化为闭子群 H，而不要求 $P(M, G)$ 上的联络(群G的规范势)必须约化为子丛 $P'(M, H)$上的联络(群H的规范势). 而由定理 2，G-主丛 $P(M, G)$的约化需要考虑配丛 $E(M, G/H, G, P)$，H-子丛 $P'(M, H)$ 可由配丛 E 上相应的截面来标记.

如何进一步由 G-主丛 $P(M, G)$ 的联络(群G的规范势)诱导出 H-子丛 $P'(M, H)$ 的联络(群H的规范势)呢? 下面的定理给出了二者之间的联系[10].

定理 3. 若群 G 的李代数 g 中有子空间 m，与子群H的李代数 h 满足 $g = h + m$ (直和)，且 $ad(H)m = m$，则主丛 $P(M, G)$ 上的联络 ω 限制在子丛 $P'(M, H)$ 上并取其 h 分量，就得到 H-子丛 $P'(M, H)$ 上的联络.

这表明，当主丛 $P(M, G)$ 可约化为子丛 $P'(M, H)$，且定理 3 的条件得到满足时，我们可以根据定理 3 给出的联系，由M上的 G-规范势得到 H-规范势.

综上所述，若取G为规范理论的原始规范群，H为原始对称性破坏后的剩余对称群，按照上述定理，我们就可以从 G-主丛 $P(M, G)$ 及其规范势，通过配丛 $E(M, G/H, G, P)$ 及其截面 σ: $M \to E = P/H$，得到剩余对称群H的主丛 $P'(M, H)$ 及其规范势. 显然，H-规范场的对偶荷及其拓扑性质，当然应由主丛 $P(M, G)$ 以及配丛 $E(M, G/H, G, P)$ 上的截面 σ: $M \to E = P/H$ 的拓扑性质决定.

应当指出，纤维丛理论中的这些定理，具有相当的普遍性. 因此，按照上面的线索，我们可以讨论任意李群 G 为规范群的规范理论中剩余对称群 H 的规范势及其对偶荷问题. 本文将按照这一线索讨论 $G = SU(2)$, $H = U(1)$，以及 $G = SO(3)$, $H = SO(2)$ 的最简单的情形.

三、$SO(3)$规范场中磁单极的电磁势

现在，考虑 $SO(3)$ 规范理论中磁单极的纤维丛理论. 给出由主丛 $P[M^4, SO(3)]$ 到子丛 $P'[M^4, SO(2)]$ 的约化，以及电磁势的一般形式. 进而自然得到 'tHooft 电磁场强的表达式. 有关磁单极数值的拓扑问题留待第六节讨论.

按照定理 1，可以约化的充要条件是，$SO(3)$-主丛 $P[M^4, SO(3)]$ 上存在一个整体规范，使其中所有的联接函数都取值在 $SO(2)$ 子群上. 同时，由定理 2，$SO(3)$-主丛 $P[M^4, SO(3)]$的 $SO(2)$-子丛，与以齐性空间$SO(3)/SO(2)$为纤维的配丛 $E[M^4, SO(3)/SO(2), SO(3), P]$ 上的截面T来标记 $SO(2)$-子丛 $P'[M^4, SO(2)]$.

已知齐性空间 $SO(3)/SO(2)$ 同胚于二维球面 S_G^2，可以用 $SO(3)$ 的李代数(三维同位旋空间)中的单位球面

$$t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = 1 \tag{3.1}$$

表示 $S_G^2 \cong SO(3)/SO(2)$. 在配丛 E 上取局部坐标. 于是，E 的截面，在每一坐标邻域 W_i 内，可以用 W_i 上取值在 S_G^2 上的函数 $\mathbf{t}_i(x)$ 表示之 ($x \in W_i$, $U_i W_i = M^4$, "$\rightarrow$" 表示同位旋矢量). 在重迭区域 $W_i \cap W_j$ 内，$\mathbf{t}_i(x)$ 与 $\mathbf{t}_j(x)$ 相差一个 $SO(3)$ 规范变换；此规范变换由主丛 $P[M^4, SO(3)]$ 上相应的联接函数给出. 在规范理论中，截面 $\mathbf{t}(x)$，作为时空 M^4 上的标量，同位旋空间中的矢量函数，它将表示 M^4 上每一点剩余对称性 $SO(2)$ 的方向，因而就是模为 1 的唯象 Higgs 场 $[\mathbf{t}(x) \cdot \mathbf{t}(x) = 1]$.

我们来具体描述截面 $\mathbf{t}(x)$ 与 $SO(2)$-子丛之间的对应关系.

为确定起见，取 $SO(2)$ 子群为同位旋空间中绕第三轴的转动子群 H. 首先给出群 $SO(3)$ 对子群 $H \cong SO(2)$ 的陪集分解以及同胚映射 ϕ: $S_G^2 \rightarrow SO(3)/SO(2)$ 的具体表示. 用两个邻域 V_1、V_2 来复盖 S_G^2: S_G^2 上的点用满足 (3.1) 式的 (t_1, t_2, t_3) 表示，取

$$V_1:\ S_G^2 - (0, 0, -1), \quad V_2:\ S_G^2 - (0, 0, 1) \tag{3.2}$$

定义 $SO(3) \rightarrow SO(3)/SO(2) \cong S_G^2$ 的投影映射 P 为

$$P(R) = R(\mathbf{e}_3) \tag{3.3}$$

其中 $R \in SO(3)$, $\mathbf{e}_3 \in S_G^2$ 就是点 $(0, 0, 1)$，即第三轴上的单位矢量，$R(\mathbf{e}_3)$ 代表 $SO(3)$ 转动 R 作用于 S_G^2 上把点 $\mathbf{e}_3$ 所变到的点. 引入映射 $\phi_1: V_1 \rightarrow SO(3)$ 为[11]

$$\phi_1(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{t_1^2}{1+t_3} & -\dfrac{t_1 t_2}{1+t_3} & t_1 \\ -\dfrac{t_1 t_2}{1+t_3} & 1 - \dfrac{t_2^2}{1+t_3} & t_2 \\ -t_1 & -t_2 & t_3 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

其中 $\mathbf{t} \in V_1$ (即 $(t_3 \neq -1)$, $\phi_1(\mathbf{t}) \in SO(3)$ 代表沿 S_G^2 上通过点 $\mathbf{t}$ 和 $\mathbf{e}_3$ 的大圆并把点 $\mathbf{e}_3$ 变到 $\mathbf{t}$ 的转动，它保持与 $\mathbf{t}$ 和 $\mathbf{e}_3$ 都垂直的轴不变. 于是，每个转动 $R \in P^{-1}(V_1) \subset SO_3$ 可以唯一地表为如下形式

$$R = \phi_1(\mathbf{t}) \cdot r \qquad (\mathbf{t} \in V_1,\ r \in H) \tag{3.5}$$

因而，$\phi_1(\mathbf{t}) \cdot H$ 就是 $P^{-1}(V_1) \subset SO(3)$ 中的陪集分解，$\phi_1(\mathbf{t})$ 可视为每个陪集的代表元素. 又引入映射 ϕ_2: $V_2 \rightarrow SO(3)$ 为[11]

$$\phi_2(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} -1 + \dfrac{t_1^2}{1-t_3} & -\dfrac{t_1 t_2}{1-t_3} & t_1 \\ \dfrac{t_1 t_2}{1-t_3} & 1 - \dfrac{t_2^2}{1-t_3} & t_2 \\ -t_1 & t_2 & t_3 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

[若以 λ 表示绕 t_2 轴的 180° 转动，则 $\phi_2(t) = (\lambda\phi_1\lambda)(\mathbf{t})$]. 于是每个转动 $R \in P^{-1}(V_2) \subset SO(3)$ 可唯一地表为

$$R = \phi_2(\mathbf{t}) \cdot r' \qquad (\mathbf{t} \in V_2,\ r' \in H) \tag{3.7}$$

因而，$\phi_2(\mathbf{t}) \cdot H$ 就是 $P^{-1}(V_2) \subset SO(3)$ 中的陪集分解，$\phi_2(\mathbf{t})$ 可视为此陪集分解中每个陪集的代表元素. $\phi_1(\mathbf{t})$ 与 $\phi_2(\mathbf{t})$ 可视为同胚映射 $S_G^2 \rightarrow SO(3)/SO(2)$ 在邻域 V_1, V_2 中的局部坐标表示式.

下面说明配丛 E 上的截面 $\mathbf{t}(x)$ 与 $SO(3)$-主丛 $P[M^4, SO(3)]$ 的 $SO(2)$-子丛 $P'[M^4,$

$SO(2)]$ 之间的对应关系．在 $P[M^4, SO(3)]$ 上取一整体规范 $\{(W_i, \phi_i)\}$，其中 $\bigcup_i W_i = M^4$，ϕ_i：$\pi^{-1}(W_i) \to W_i \times SO(3)$ 为局部主坐标映射，π：$P \to M^4$ 为投射．通过 ϕ_i，$\pi^{-1}(W_i)$ 可视为直积 $W_i \times SO(3)$．设 $\mathbf{t}_i(x)$ 为配丛 E 上的截面在相应的局部坐标下的表示．取 $W_i \times SO(3)$ 的子集 $W_i \times \phi(\mathbf{t}_i) \cdot H$，做和集 $\bigcup_i W_i \times \phi_1(\mathbf{t}_i) \cdot H$．当 $x \in W_i \cap W_j$ 时，把点 $[x, \phi(\mathbf{t}_i)r] \in W_i \times \phi(\mathbf{t}_i) \cdot H$ 与点 $[x, \phi(\mathbf{t}_j)r] \in W_j \times \phi(\mathbf{t}_j) \cdot H$ 看作同一个点，这样就得到了以 M^4 为底，$H \cong SO(2)$ 为结构群的一个 $SO(2)$-子丛 $P'[M^4, SO(2)]$．它的联接函数为

$$S'_{ji}(x) = [\phi(\mathbf{t}_j(x))]^{-1} S_{ji}(x) \phi[\mathbf{t}_i(x)] \tag{3.8}$$

其中 $x \in W_i \cap W_j$，$S_{ji}(x)$ 为 $SO(3)$-主丛 $P[M^4, SO(3)]$ 上在重迭区 $W_i \cap W_j$ 中的联接函数．这样，就由配丛 E 上的截面 $\mathbf{t}(x)$ 构造出由它标记的 $SO(2)$-子丛．反之，由任一 $SO(2)$-子丛 $P'[M^4 SO(2)]$ 可以构造出配丛 E 上相应的截面 $\mathbf{t}(x)$ 来．不过，在下面的讨论中不涉及这一点，故从略．

现在，由 $SO(3)$-主丛 $P[M^4, SO(3)]$ 的联络 ω 求出由 $\mathbf{t}(x)$ 标记的 $SO(2)$-子丛 $P[M^4, SO(2)]$ 上的联络 ω'．不难验证，定理 3 的条件是满足的，因而，ω' 应为 ω 限制于该 $SO(2)$-子丛 P'，且取其相应于 $SO(2)$ 生成元的分量．下面给出 ω' 在局部坐标下的具体表达式．

在主丛 $P[M^4, SO(3)]$ 的某一局部主坐标表示 (W_i, ϕ_i) 下，联络 ω 可写为

$$\omega = R^{-1} dR + R^{-1} B_\mu R dx^\mu \tag{3.9}$$

其中 $R \in SO(3)$，$B_\mu = B^a_\mu X_a [a = 1, 2, 3;\ X_a$ 为 $SO(3)$ 生成元$]$，$\mathbf{B}_\mu$ 即为 $SO(3)$ 规范势．取

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[X_a, X_b] = \varepsilon_{abc} X_c$$

X_3 就是绕同位旋空间第三轴转动的 $SO(2)$ 子群的生成元．如前所述，在此局部主坐标表示下，$SO(2)$-子丛 $P'[M^4, SO(2)]$ 上的点可表为 $[x, \phi(\mathbf{t}(x)) \cdot r]$，其中 $r \in SO(2)$，$x \in W_i$，$\mathbf{t}(x)$ 为此子丛相应的配丛 E 的截面的局部坐标表示 $[\mathbf{t}(x)$ 的下标 i 在不引起混淆的情形下已略去$]$．因此，将陪集分解式 $R = \phi[\mathbf{t}(x)] \cdot r$ 代入 (3.9) 式，就得到联络 ω 在子丛 P' 上的限止

$$\omega|_{P'} = r^{-1} dr + r^{-1} B'_\mu r dx^\mu \tag{3.10}$$

其中

$$B'_\mu = \phi^{-1} \partial_\mu \phi + \phi^{-1} B_\mu \phi \quad [\phi = \phi(\mathbf{t}(x))] \tag{3.11}$$

取 $\omega|_{P'}$ 的 X_3 分量就得到 $SO(2)$-子丛 $P'[M^4, SO(2)]$ 上的联络

$$\omega' = r^{-1} dr + r^{-1} A_\mu r dx^\mu \tag{3.12}$$

其中

$$A_\mu = B'^3_\mu = B'_\mu \text{ 的 } X_3 \text{ 分量} \tag{3.13}$$

就是 $SO(2)$-子丛 P' 上的 $SO(2)$ 规范势（电磁势）．相应的 $SO(2)$-子丛 P' 的曲率 2-形式为

$$\Omega' = \frac{1}{2} r^{-1} F_{\mu\nu} r dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} \tag{3.14}$$

其中

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu} \tag{3.15}$$

就是 $SO(2)$-子丛 P' 上的 $SO(2)$ 规范场强(电磁场强).

当 $t_3(x) \neq -1$ 时，可取 (3.4) 式定义的 $\phi = \phi_1[\mathbf{t}(x)]$，由 (3.11)，(3.13) 式，可得

$$A_{\mu} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{B}_{\mu} - \frac{t_1 \partial_{\mu} t_2 - t_2 \partial_{\mu} t_1}{1 + t_3} \tag{3.16}$$

当 $t_3(x) \neq +1$ 时，可取 (3.6) 定义的 $\phi = \phi_2[\mathbf{t}(x)]$，得

$$A_{\mu} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{B}_{\mu} + \frac{t_1 \partial_{\mu} t_2 - t_2 \partial_{\mu} t_1}{1 - t_3} \tag{3.17}$$

(3.16) 与 (3.17) 之间仅差一个 $SO(2)$ 规范变换

$$S'(x) = \phi_1^{-1}(\mathbf{t})\phi_2(\mathbf{t}) = \exp\left\{2 \operatorname{arc\,tg} \frac{t_2(x)}{t_1(x)} \cdot X_3\right\} \tag{3.18}$$

它们相应于同一个电磁场强表达式

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}(x) &= \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu} = \partial_{\mu} \tilde{A}_{\nu} - \partial_{\nu} \tilde{A}_{\mu} \\ &= \partial_{\mu}(\mathbf{t} \cdot \mathbf{B}_{\nu}) - \partial_{\nu}(\mathbf{t} \cdot \mathbf{B}_{\mu}) - \mathbf{t} \cdot \partial_{\mu} \mathbf{t} \times \partial_{\nu} \mathbf{t} \\ &= \mathbf{t} \cdot \mathbf{F}_{\mu\nu} - \mathbf{t} \cdot D_{\mu} \mathbf{t} \times D_{\nu} \mathbf{t} \end{aligned} \tag{3.19}$$

其中

$$D_{\mu} \mathbf{t} = \partial_{\mu} \mathbf{t} + \mathbf{B}_{\mu} \times \mathbf{t} \tag{3.20}$$

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_{\mu} \mathbf{B}_{\nu} - \partial_{\nu} \mathbf{B}_{\mu} + \mathbf{B}_{\mu} \times \mathbf{B}_{\nu} \tag{3.21}$$

$D_{\mu}\mathbf{t}$ 是 Higgs 场 $\mathbf{t}(x)$ 的协变导数，$\mathbf{F}_{\mu\nu}$ 为 $SO(3)$ 规范场强. 表达式 (3.19) 即 't Hooft 关于规范不变的电磁场强张量定义. 这里我们是从电磁势 (3.16)，(3.17) 的表达式推导出来的.

评注 1　在 $SO(3)$ 对 $SO(2)$ 的陪集分解 $\phi(\mathbf{t}) \cdot H$ 中，每个陪集的代表元素 $\phi(\mathbf{t})$ 的择选有一定的任意性，可以不同于(3.4)和(3.6)式. 但是不同的选择之间只差右乘一个因子 $r \in H$，即 $\tilde{\phi}[\mathbf{t}(x)] = \phi[\mathbf{t}(x)] \cdot r(x)$. 因此，所导致的电磁势 A_{μ} 之间只差一个 $SO(2)$ 规范变换，而导出的电磁场强表达式不变，都是 (19) 式.

评注 2　我们所选择的 $\phi(\mathbf{t})$ 的形式(3.4)或(3.6)，恰好使电磁势 A_{μ} 的表达式(3.16)或 (3.17) 式右边第二项具有 Wu-Yang 磁势的形式 (不过是在同位旋空间中).

四、$SU(2)$ 规范场中磁单极的电磁势

现在，讨论 $SU(2)$ 规范理论中磁单极的纤维丛描述.

为了描述 $SU(2)$ 规范理论中的磁单极，不仅需要 $SU(2)$-主丛 $P[M^4, SU(2)]$，而且需要它可约化为 $U(1)$-子丛 $P'[M^4, U(1)]$. 同时，后者与以齐性空间 $SU(2)/U(1)$为纤维的配丛 $E[M^4, SU(2)/U(1), SU(2), P]$上的截面 T，是一一对应的. 已知 $SU(2)/U(1) \cong S_G^2$，亦可用 $SU(2)$ 的李代数(三维同位旋空间) 中的单位球面 (3.1) 式来表示. 于是配丛 E 上

的截面在局部坐标表示下亦可用取值在同位旋空间中的函数 $\mathbf{t}(x)$ 来表示，在破缺 $SU(2)$ 规范理论中，这就是一个么模 Higgs 场，属于 $SU(2)$ 正则表示．所以和 $SO(3)$ 规范理论一样，描述 $SU(2)$ 规范场的磁荷，不仅需要 $SU(2)$ 规范势，还需要一个么模 Higgs 场 $\mathbf{t}(x)$。

为了给出 $\mathbf{t}(x)$ 所标记的 $U(1)$-子丛 $P'[M^4, U(1)]$，需要 $SU(2)$ 群对 $U(1)$ 子群的陪集分解以及同胚映射 ϕ: $S_G^2 \to SU(2)/U(1)$ 的具体表示．将 $M \in SU(2)$ 表为

$$M = \begin{pmatrix} z_2 & -\bar{z}_1 \\ z_1 & \bar{z}_2 \end{pmatrix} \quad \bar{z}_1 z_1 + \bar{z}_2 z_2 = 1 \tag{4.1}$$

已知 S_G^2 同胚于复射影直线，故可用齐次坐标 $[z_1, z_2]$ 表示 S_G^2 上的点．取两个坐标邻域 V_1、V_2 来复盖 S_G^2

$$V_1:\ S_G^2 - [1, 0] \qquad V_2:\ S_G^2 - [0, 1] \tag{4.2}$$

定义投影映射 h: $SU(2) \to SU(2)/U(1) \cong S_G^2$ 为

$$h\left[\begin{pmatrix} z_2 & -\bar{z}_1 \\ z_1 & \bar{z}_2 \end{pmatrix}\right] = [z_1, z_2] \tag{4.3}$$

在 $h^{-1}(V_1)$ 中，令

$$z_1 = \sigma^{-\frac{1}{2}} z e^{i\alpha} \qquad z_2 = \sigma^{-\frac{1}{2}} e^{i\alpha} \tag{4.4}$$

其中 $z = z_1/z_2$, $\sigma = 1 + \bar{z}z$.

定义

$$\phi_1(z) = \sigma^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\bar{z} \\ z & 1 \end{pmatrix} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

则

$$M = \phi_1(z)\Lambda \qquad \phi_1(z) \in SU_2 \qquad \Lambda \in U_1 \subset SU_2 \tag{4.6}$$

当 $z \in V_1$ 时，$\phi(z) \cdot H$ 给出 $h^{-1}(V_1)$ 中 $SU(2)$ 的陪集分解，其中 $H \cong U(1)$ 为当 α 取遍 $0 \leqslant \alpha < 2\pi$ 时矩阵 Λ 的集合所形成的 $U(1)$ 子群．S_G^2 的直角坐标表示 (t_1, t_2, t_3) 与复射影直线齐次坐标表示 $[z_1, z_2]$ 或 $z = z_1/z_2$ 之间的关系如下：将 z 写为 $z = x_1 + ix_2$ 的形式，则 (x_1, x_2) 是 S_G^2 上的以南极为投影中心的测地投影坐标．于是，

$$z = (t_1 + it_2)/1 + t_3 \qquad (z \in V_1) \tag{4.7}$$

将 (4.7) 代入 (4.5)，则得 $\phi_1(\mathbf{t}) \equiv \phi_1(z)$ 的表示式．$\phi_1(\mathbf{t})$ 可视为陪集 $\phi_1(\mathbf{t}) \cdot H$ 的代表元素．

同样，在 $h^{-1}(V_2)$ 中，令

$$\left.\begin{aligned} & z_1 = \sigma'^{-1/2} e^{i\alpha'} \qquad z_2 = \sigma'^{-1/2} z' e^{i\alpha'} \\ \text{其中} \quad & z' = z_2/z_1 \qquad \sigma' = 1 + \bar{z}' z' \end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

定义

$$\phi_2(z') = \sigma'^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 & z' \\ -\bar{z}' & 1 \end{pmatrix} \qquad \Lambda' = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha'} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha'} \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

则当 $M \in h^{-1}(V_2)$ 时，它可唯一地表示为

$$M = \phi_2(z')\Lambda' \qquad [\phi_2(z') \in SU_2,\ \Lambda' \in H] \tag{4.10}$$

记 $z' = x_1' - ix_2'$, (x_1', x_2') 为 S_G^2 上次北极为投影中心的测地投影坐标．则

$$z' = t_1 - it_2/1 - t_3 \qquad (z' \in V_2) \tag{4.11}$$

将(4.11)代入(4.9)式得 $\phi_2(\mathbf{t}) \equiv \phi_2(z')$ 的表达式．于是，$\phi_2(\mathbf{t}) \cdot H$ 给出 $\mathbf{t} \in V_2$ 时 $h^{-1}(V_2)$ 中 $SU(2)$ 群的陪集分解．$\phi_2(t)$ 可视为每个陪集的代表元素．$\phi_1(\mathbf{t})$ 和 $\phi_2(\mathbf{t})$ 可视为同胚映射 $S_G^2 \to SU(2)/U(1)$ 在邻域 V_1, V_2 中的局部坐标表示．

基于上述陪集分解，由配从 E 上的截面 $\mathbf{t}(x)$ 来构造它所标记的 $U(1)$ 子从 $P'[M^4, U(1)]$ 的过程完全与 $SO(3)$ 的情形一样．这里，同样不难验证，定理 3 的条件是成立的．将 $SU(2)$ 主从 $P[M^4, SU(2)]$ 的联络 ω 限制在 $U(1)$ 子从 P' 上并取相应 $U(1)$ 生成元的分量，同样可得到由 $\mathbf{t}(x)$ 标记的 $U(1)$-子从．

在主从 $P[M^4, SU(2)]$ 的某一局部主坐标表示下，

$$\left.\begin{aligned} &\omega = M^{-1}dM + M^{-1}B_\mu M dx^\mu \\ \text{其中}\quad &M \in SU_2 \qquad B_\mu = B_\mu^a X_a \end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

取 $SU(2)$ 生成元为 $X_a = \frac{1}{2i}\sigma_a$, σ_a 为 Pauli 矩阵．

则 $[X_a, X_b] = \epsilon_{abc}X_c$

X_3 为 $U(1)$ 子群 H 的生成元．将陪集分解式 $M = \phi[\mathbf{t}(x)] \cdot \Lambda$ 代入(4.12)，并取其 X_3 分量，得

$$\omega' = \Lambda^{-1}d\Lambda + \Lambda^{-1}A_\mu \Lambda dx^\mu \tag{4.13}$$

其中

$$A_\mu = B_\mu'^3 = B_\mu' \text{ 的 } X_3 \text{ 分量} \tag{4.14}$$

$$B_\mu' = \phi^{-1}\partial_\mu\phi + \phi^{-1}B_\mu\phi \quad [\phi = \phi(\mathbf{t}(x))] \tag{4.15}$$

B_μ^a 是 $SU(2)$ 主从 $P[M^4, SU(2)]$ 上的规范势，A_μ 是 $U(1)$ 子从 $P'[M^4, U(1)]$ 上的规范势(电势势)．$U(1)$ 子从 P' 上相应的曲率 2-形式为

$$\Omega' = \frac{1}{2}\Lambda^{-1}F_{\mu\nu}\Lambda dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{4.16}$$

其中

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{4.17}$$

就是 $U(1)$-子从 P' 上的 $U(1)$ 规范场强(电磁场强张量)．

当 $t_3(x) \neq -1$ 时，可取(4.5)(4.7)式定义的 $\phi = \phi_1[\mathbf{t}(x)]$，得

$$A_\mu = \mathbf{t} \cdot \mathbf{B}_\mu - \frac{t_1\partial_\mu t_2 - t_2\partial_\mu t_1}{1 + t_3} \tag{4.18}$$

当 $t_3 \neq +1$ 时，可取(4.9)(4.11)式定义的 $\phi = \phi_2[\mathbf{t}(x)]$，得

$$\widetilde{A}_\mu = \mathbf{t} \cdot \mathbf{B}_\mu + \frac{t_1\partial_\mu t_2 - t_2\partial_\mu t_1}{1 - t_3} \tag{4.19}$$

(4.18)与(4.19)式只差一个 $U(1)$ 规范变换

$$S'(x) = \phi_1^{-1}(\mathbf{t})\phi_2(\mathbf{t}) = \exp\left\{2\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{t_2}{t_1} \cdot X_3\right\} \tag{4.20}$$

所以两式相应于同一个场强，

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \partial_\mu \widetilde{A}_\nu - \partial_\nu \widetilde{A}_\mu \\ &= \partial_\mu(\mathbf{t} \cdot \mathbf{B}_\nu) - \partial_\nu(\mathbf{t} \cdot \mathbf{B}_\mu) - \mathbf{t} \cdot \partial_\mu \mathbf{t} \times \partial_\nu \mathbf{t} \\ &= \mathbf{t} \cdot \mathbf{F}_{\mu\nu} - \mathbf{t} \cdot D_\mu \mathbf{t} \times D_\nu \mathbf{t} \end{aligned} \tag{4.21}$$

这就是 'tHooft 关于规范不变的电磁场强张量的定义. 这里我们是从电磁势(4.18)(4.19)的表达式推导出来的.

第二节末的两个评注这里同样适用.

不难看出,对$SO(3)$和$SU(2)$规范理论,电磁势A_μ及电磁场强$F_{\mu\nu}$的局部坐标表达式对两者是完全一样的. 不过,由于$SO(3)$和$SU(2)$群的整体性质不同,二者主丛的拓扑性质会有差别. 这在考虑磁单极的数值时是需要注意的.

五、电磁势和 Higgs 场的关系

在讨论$SU(2)$或$SO(3)$主丛的$U(1)$子丛的第一陈类(磁荷)之前,先以$SU(2)$规范场为例,对前两节的描述加以物理解释.

根据纤维丛理论,对$SU(2)$规范场磁单极的描述,需要一个么模的同位旋矢量的 Higgs 场$\mathbf{t}(x)$,以便确定该磁单极所相应的$U(1)$子丛以及时空各点同位旋空间中的电荷方向,因而是不可缺少的. 这从杨振宁和 Mills[12] 当初引入$SU(2)$规范场的基本思想看来是很自然的. 他们指出,按照定域相互作用原理,自然界中不存在超距作用,我们没有任何理由说时空中一切点对质子、中子在同位旋空间中的定义都是一样的. 应该允许时空中各点质子、中子在同位旋空间内取向的定义可以有不同的选取. 而且在$SU(2)$对称严格保持的情况下,物理现象应该不依赖于时空各点质子、中子定义的选取. 也就是说,物理理论应该对于任意的$SU(2)$定域规范变换是协变的. 为此需要引入$SU(2)$规范场. 对于强相互作用的电荷无关性,质子、中子对强相互作用而言是一样的,由此用强相互作用无法区分质子和中子. 所以杨和 Mills 的论证对于$SU(2)$对称严格成立的强作用是完全适用的.

但是,物理上质子和中子并不完全一样,它们的电荷不同,因而电磁作用也不同,而电磁作用是破坏$SU(2)$对称的,所以,用电磁作用可以区分质子和中子. 在讨论$SU(2)$规范理论中的电磁现象时,不能说同位旋空间中所有的方向都是等价的,其中有某一特殊方向代表电荷的方向. 沿这个方向同位旋投影为$+1/2$的代表物理上带电的质子,沿这个方向同位旋投影为$-1/2$的代表物理上不带电的中子. 按照定域相互作用原理,我们没有道理说,时空各点处定义质子和中子的电荷方向在同位旋空间中都是一样的. 就也是说,在时空中应有一个么模的同位旋矢量场$\mathbf{t}(x)$,它决定着时空各点处在同位旋空间中的电荷方向,而按在此方向上同位旋投影值的不同来区分粒子的电荷.

这样,在涉及电磁现象[即非完全的$SU(2)$对称情形]时,杨-Mills 关于引入$SU(2)$规范场的论证要稍加修改. 这时,时空中各点质子、中子在同位旋空间中的取向可以不同[由 Higgs 场$\mathbf{t}(x)$决定],但并非可以任意选取. 可以任意选取的是时空各点的同位旋坐标系(同位旋活动标架). 与此相应,需要引入$SU(2)$规范场.

总之,电磁现象这种非完全$SU(2)$对称的情形也可以用$SU(2)$规范理论来处理. 不过,除了$SU(2)$规范场之外,还需引入么模的同位旋矢量场$\mathbf{t}(x)$来标记时空各点处电荷的方向. 此时,定域$SU(2)$规范变换理解为时空各点处同位旋活动标架的不同选取,而时空各点处绕相应的$\mathbf{t}(x)$的同位旋转动代表电荷位相规范变换$U(1)$子群. [这相应于

纤维丛理论中要有配丛 E 上的截面来标记相应的 $U(1)$-子丛.]当然,局部说来,总可以通过非奇异的 $SU(2)$ 规范变换,把时空中每点的一邻域内的 $\mathbf{t}(x)$ 都取为同位旋第三轴的方向. 但整体说来, 不一定能做到这一点. 有磁荷时就是如此 (见下节).

那么, 如何定义 $SU(2)$ 规范理论中的电磁势呢? 在通常的规范理论中, 总是讨论在整个时空中可以通过非奇异 $SU(2)$ 规范变换使各点 $\mathbf{t}(x)$ 都沿同位旋第三轴方向的情形. 这时函数 $\mathbf{t}(x)$ 不明显出现, 而电磁势就定义为 $SU(2)$ 规范势 $\mathbf{B}_\mu$ 的第三分量. 在一般情形下, 当 $\mathbf{t}(x)$ 不是同位旋第三轴方向时, 应该做 $SU(2)$ 规范变换, 把某一邻域内时空各点的第三轴都转到 $\mathbf{t}(x)$ 方向,在转动后的同位旋标架看来, $\mathbf{t}(x)$ 都沿新的第三轴方向了. 于是可取 $SU(2)$ 规范变换后的 $\mathbf{B}'_\mu$ 的第三分量定义为电磁势. 虽然一般说来不能在整个时空中整体地定义一个电磁势,但是总可以用上述办法局部地定义电磁势.

设已取某个 $SU(2)$ 整体规范, 在某个邻域 $W_i \subset M^4$ 内, $SU(2)$ 规范势为 $\mathbf{B}_\mu$, 么模 Higgs 场为 $\mathbf{t}(x)$. 把同位旋空间第三轴(即生成元 X_3)变到 $\mathbf{t}(x)$ 方向[即生成元 $t_a(x)X_a$] 的 $SU(2)$ 规范变换就是 (4.5) 和 (4.9) 式给出的 $\phi(\mathbf{t}(x))$][当 $[t_3(x) \neq -1$ 时可取 $\phi = \phi_1(\mathbf{t}(x))$; 当 $t_3(x) \neq +1$ 时, 可取 $\phi = \phi_2(\mathbf{t}(x))$]. 不难验证

$$\phi[\mathbf{t}(x)]X_3\phi^{-1}[\mathbf{t}(x)] = t_a(x)X_a \tag{5.1}$$

在此 $SU(2)$ 规范变换下, $SU(2)$ 规范势变为

$$\mathbf{B}'_\mu \cdot \mathbf{X} = \phi^{-1}(\mathbf{t})\mathbf{B}_\mu \cdot \mathbf{X}\phi(\mathbf{t}) + \phi^{-1}(\mathbf{t})\partial_\mu\phi(\mathbf{t}) \tag{5.2}$$

例如, 取 $\phi = \phi_1[\mathbf{t}(x)]$, 我们便得到

$$B'^3_\mu = \mathbf{t} \cdot \mathbf{B}_\mu - \frac{t_1\partial_\mu t_2 - t_2\partial_\mu t_1}{1 + t_3} \tag{5.3}$$

$$B'^1_\mu = -D_\mu t_2 + \frac{t_2 D_\mu t_3}{1 + t_3} \tag{5.4}$$

$$B'^2_\mu = D_\mu t_1 - \frac{t_1 D_\mu t_3}{1 + t_3} \tag{5.5}$$

若取 $\phi = \phi_2[\mathbf{t}(x)]$ 亦可得到类似的式子. 由于在新的同位旋标架中,电荷的同位旋方向 $\mathbf{t}(x)$ 在此邻域 W_i 内都与同位旋第三轴方向一致,故可定义此邻内的电磁势 A_μ 为规范变换后的 B'^3_μ. 相应的电磁场强表达式即 'tHooft 的定义, 即

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \mathbf{t} \cdot \mathbf{F}_{\mu\nu} - \mathbf{t} \cdot D_\mu\mathbf{t} \times D_\nu\mathbf{t} \tag{5.6}$$

不难看出, (5.2) (5.3), (5.6) 式分别对应于 (4.15), (4.18), (4.21) 式. 因此, 纤维丛理论中从主丛 $P[M^4, SU(2)]$ 的联络 ω 诱导出 $U(1)$ 子丛 $P[M^4, U(1)]$ 的联络 ω' 的过程,在这里被解释为把同位旋第三轴转到电荷方向 $\mathbf{t}(x)$ 的规范变换. 这个 $SU(2)$ 规范变换不必非取前面定义的 $\phi_1(\mathbf{t})$ 或 $\phi_2(\mathbf{t})$ 不可. 事实上, 取满足 (5.1) 的任何一个 $\phi(\mathbf{t})$ 都可以, 所得到的 B'^a_μ 之间只差一个由 X_3 生成的规范变换,即只差绕新的第三轴[在原来的标架中看是 $\mathbf{t}(x)$ 方向]的一个转动.

B'^1_μ、B'^2_μ 可解释为带电的中间玻色子 (规范场粒子) 所相应的势分量. 由 (5.4) (5.5) 可以看出: 当 $D_\mu\mathbf{t} \equiv \partial_\mu\mathbf{t} + \mathbf{B}_\mu \times \mathbf{t} = 0$ 时, $SU(2)$ 规范势 $\mathbf{B}_\mu$ 可以约化为 $U(1)$ 规范势, 它实际上只有电磁势 B'^3_μ, 没有带电中间玻色子势 B'^1_μ, B'^2_μ (类似的结论在文 [2] 中已得到,但那里电磁势及中间玻色子场的表达式与我们不同).

对 $SO(3)$ 规范理论，上述讨论同样适用.

六、量子条件和 Higgs 场的拓扑性质

最后讨论 $SU(2)$ 或 $SO(3)$ 主丛的 $U(1)$ 子丛或 $SO(2)$ 主丛的第一陈类. 在这个讨论中将看到 $SU(2)$ 群与 $SO(3)$ 群的整体性质带来的差别.

在时空 M^4 中,考虑一类空的二维闭合球面 S^2_M. 当 M^4 限制于 S^2_M 时，便有主丛 $P[S^2_M, SU(2)]$ 或 $P[S^2_M, SO(3)]$ 及其相应的子丛 $P'[S^2_M, U(1)]$ 或 $P'[S^2_M, SO(2)]$. S^2_M 所包围的磁荷便是 $U(1)$ 子丛 $P'[S^2_M, U(1)]$ 或 $SO(2)$ 子丛 $P'[S^2_M, SO(2)]$ 的第一陈类.

用两个邻域来复盖 S^2_M. 取

$$W_1:\ S^2_M\text{-南极} \qquad W_2:\ S^2_M\text{-北极} \tag{6.1}$$

赤道大圆记为 S^1. 重迭区域 $W_1\cap W_2$ 中的联接函数记为 S_{21}，它限制于赤道上给出主丛 $P(S^2_M, G)$ 的特征映射

$$C = S_{21}|S^1:\ S^1 \to G \tag{6.2}$$

其中 G 为 $SU(2)$ 或 $SO(3)$. 在纤维丛理论中有如下的分类定理[11]: 主丛 $P(S^2_M, G)$ 的规范型(同构等价类)，由特征映射 C 的同伦分类决定，即一一对应于同伦群 $\pi_1(G)$ 的元素. 由于 $SU(2)$ 与 $SO(3)$ 的整体性质不同，前者同胚于三维球 S^3，后者同胚于三维实射影空间 RP^3. 故 $SU(2)$ 的同伦群 $\pi_1[SU(2)] = \pi_1(S^3) = 0$，它只有一个元素[11]; 而 $SO(3)$ 的同伦群 $\pi_1[SO(3)] = \pi_1(RP^3) = Z_2$ (二阶循环群)，它有两个元素[11]. 因此主丛 $P[S^2_M, SU(2)]$ 只有一个规范型,即都同构于乘积丛(平凡丛),而主丛 $P[S^2_M, SO(3)]$ 有两个规范型，除了平凡丛外还有一个非平凡丛[6]. 这个差别使我们对 $SU(2)$ 和 $SO(3)$ 规范场磁荷的讨论必须分开进行,尽管它们电磁势的局部表达式是一样的.

在 $SU(2)$ 情形下，由于 $P[S^2_M, SU(2)]$ 都是平凡丛，我们可以选一整体规范，使联接函数 $S_{21}(x) = e$ (单位元素). 设在此整体规范下，$SU(2)$ 规范势为 $\mathbf{B}_\mu$, Higgs 场为 $\mathbf{t}(x)$. 由公式 (3.16) 及 (3.17) 可由 $U(1)$ 子丛 $P[S^2_M, U(1)]$ 上的曲率 2-形式计算其第一陈类

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2}\int_{S^2_M} F_{\mu\nu}dx^\mu\wedge dx^\nu \\ &= \frac{1}{2}\oint_{S^1}\{\mathbf{t}^{(1)}\cdot\mathbf{B}^{(1)}_\mu - \mathbf{t}^{(2)}\cdot\mathbf{B}^{(2)}_\mu\}dx^\mu \\ &\quad - \frac{1}{2}\left\{\int_{\text{上半球}}\mathbf{t}^{(1)}\cdot\partial_\mu\mathbf{t}^{(1)}x\partial_\nu\mathbf{t}^{(1)}dx^\mu\wedge dx^\nu + \int_{\text{下半球}}\mathbf{t}^{(2)}\cdot\partial_\mu\mathbf{t}^{(2)}x\partial_\nu\mathbf{t}^{(2)}dx^\mu\wedge dx^\nu\right\} \end{aligned} \tag{6.3}$$

其中 $\mathbf{t}^{(i)}$, $\mathbf{B}^{(i)}_\mu$ 分别为邻域 W_i 中的 Higgs 场和 $SU(2)$ 规范势. 由于 $S_{21}(x) = e$，故 $\mathbf{t}^{(1)} = \mathbf{t}^{(2)}$, $\mathbf{B}^{(1)}_\mu = \mathbf{B}^{(2)}_\mu$. 上式中右边第一项对磁荷无贡献,只有第二项对磁荷有贡献. 它给出

$$D = -\frac{1}{2}\int_{S^2_M}\mathbf{t}\cdot\partial_\mu\mathbf{t}x\partial_\nu\mathbf{t}dx^\mu\wedge dx^\nu = -K \tag{6.4}$$

这里 K 表示映射 $\mathbf{t}$: $S^2_M \to S^2_G$ 的映射度 (Kronecker 指标)，是个整数. 它代表当 x 跑遍 S^2_M 时，$\mathbf{t}(x)$ 复盖 S^2_G 的次数. 当 $K \neq 0$ 时，映射 $\mathbf{t}$ 不同伦于常数映射，因而不可能通过非奇异规范变换把 S^2_M 上所有点处的 $\mathbf{t}(x)$ 都变换为同一个方向.

在 $SO(3)$ 的情形下，若 $P[S_M^2, SO(3)]$ 是乘积丛，则上述对 $SU(2)$ 的讨论可以照搬（取 $S_{21}(x)=e$ 的整体规范）。若 $P[S_M^2, SO(3)]$ 为非平凡丛，此时由于 $S_{21}(x)\neq e$，所以 $\mathbf{t}^{(1)}\neq\mathbf{t}^{(2)}$，$\mathbf{B}_\mu^{(1)}\neq\mathbf{B}_\mu^{(2)}$。一般说来，(6.3) 式第一项的贡献不为零。这时，不能说磁荷的数值仅仅依赖于［仅由 Higgs 场 $\mathbf{t}(x)$］构成的第二项。至于第一项对磁荷贡献的具体数值，需要另行讨论。

以上讨论中没有明显写出耦合常数。为此应做代换 $\mathbf{B}_\mu\to e\mathbf{B}_\mu$，$\mathbf{F}_{\mu\nu}\to e\mathbf{F}_{\mu\nu}$，$\mathbf{t}\to\mathbf{t}$，其中 e 为 $SU(2)$ 或 $SO(3)$ 规范场的耦合常数。于是上面得到的磁荷量子化条件应为

$$eg = D = \text{整数} \tag{6.5}$$

此式对 $SU(2)$ 及 $SO(3)$ 都适用。但在 $SU(2)$ 和 $SO(3)$ 规范理论中，最小电荷 $e_{\min}$ 与 e 的关系不同[6]

$$\left.\begin{aligned} e_{\min} &= e/2 \qquad [\text{对 } SU(2)] \\ e_{\min} &= e \qquad [\text{对 } SO(3)] \end{aligned}\right\} \tag{6.6}$$

因此，磁荷量子化条件用最小电荷来写时应为

$$\left.\begin{aligned} e_{\min}g &= D/2 \qquad [\text{对 } SU(2)] \\ e_{\min}g &= D \qquad [\text{对 } SO(3)] \end{aligned}\right\} \tag{6.7}$$

即对 $SU(2)$ 为 Dirac 量子化条件，对 $SO(3)$ 为 Schwinger 形式。

七、讨　论

(1) 在第五节中我们已经指出：物理上讨论 $SU(2)$ 或 $SO(3)$ 规范理论中的电磁现象意味着 $SU(2)$ 或 $SO(3)$ 对称性破坏为剩余的 $U(1)$ 电磁场对称性。因而需要一个么模同位旋矢量的标量场来标记时空各点处同位旋空间中电荷的方向。这种对称性破坏可以是普通的破坏，也可以是自发破缺。而唯象的 Higgs 场 $\mathbf{t}(x)$ 可以是某个基本场 $\boldsymbol{\varphi}(x)$ 的方向 $\boldsymbol{\varphi}(x)/|\boldsymbol{\varphi}(x)|$，也可以是某种复合场，如 $\bar{\psi}\dfrac{\boldsymbol{\tau}}{2}\psi$ 的方向。

(2) 本文的处理具有普遍性。当 G 为任意的紧致李群，而 H 为其极大环子群时，可以证明定理 3 的条件总是成立的[13]。因而不难直接将本文的处理方法推广到这种情形。

又如，目前不少文献讨论把 Yang-Mills 类粒子解安装到更大的对称性群中去的问题[14]。这也就是研究更大对称性群中 $SU(2)$ 子群的范规场和对偶荷。不过，这种方式只能处理可约化为 $SU(2)$ 规范势的情形。本文的处理亦可推广于不能约化为 $SU(2)$ 规范势的情形，只要该 G-主丛可以约化为 $SU(2)$ 主丛，而且更大的对称性群 $G\supset SU(2)$ 满足定理 3 的条件。

参　考　资　料

[1] G. t'Hooft, *Nucl. Phys.*, **B79** (1974), 276.
[2] A. M. Polyakov, *J. E. T. P.*, (1974).
[3] 侯伯宇，段一士，葛墨林，兰州大学学报，**2** (1975)，26. 物理学报，**25** (1976)，514.
段一士，葛墨林，科学通报，**21** (1976)，282.
[4] 李华锺，冼鼎昌，郭硕鸿，中山大学学报，**3** (1975) 7；物理学报，**25** (1976)，507.
[5] J. Arafune, P. G. O. Freund & C. J. Goebel, *Jourl. Math. Phys.*, **16**(1975), 433.

[6] T. T. Wu & C. N. Yang, *Phys. Rev.*, **D12** (1975), 3845.
[7] 谷超豪,杨振宁, *Scientia Sinica*, **20** (1977), 77.
[8] 谷超豪,杨振宁,中国科学, **6** (1976), 610.
[9] 吴詠时,郭汉英, *Scientia Sinica*, **20** (1977), 186.
吴大峻,杨振宁, *Phys. Rev.*, **D12** (1975), 3845.
[10] S. Kobayashi & K. Nomizu, "Foundations of Differential Geometry", Vol. I, Wiley (Interscience), 1963.
[11] N. Steenrod, "The Topology of Fibre Bundles", 1951.
[12] C. N. Yang & R. L. Mills, *Phys. Rev.*, **96** (1954), 191.
[13] W. Greub, S. Halperin & R. Vanstone, "Connections, Curvature, & Cohomology", Vol. II, Academic Press, Inc., 1974.
[14] 例如, F. Wilczek, *Phys. Lett.*, **65B** (1976), 160; K. M. Bitar & P. Solva, FNAL-Pub-76/85-THY.

DUAL CHARGES OF A SUBGROUP IN GAUGE THEORIES ——MAGNETIC MONOPOLES OF SU_2 & SO_3 GAUGE FIELD

WU YONG-SHI
(*Institute of Physics, Academia Sinica*)
CHEN SHIH TU TUNG-SHENG KUO HAN-YING
(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

In this paper, we discuss magnetic monopoles of an U_1-subgroup in SU_2 and SO_3 broken gauge theories, on the basis of fibre-bundle theory. We derive a general expression for the electromagnetic potentials around magnetic monopoles, which, according to the usual connection between the electromagnetic potentials and field-strength tensors, leads naturally to 't Hooft's definition of the electromagnetic field-strength tensors. Furthermore, from the view-point of fibre-bundle theory, we elucidate some problems concerning which there exist different opinions in the present literature. Our conclusions are summarized as follows.

1) In general, the description of magnetic monopoles in SU_2 and SO_3 broken gauge theories needs, in addition to SU_2 or SO_3 gauge potentials, the introduction of an unimodular Higgs isovector field to specify the direction of charge in the isospin space.

2) For the existence of magnetic monopoles, it is only required that the corresponding principal SU_2- or SO_3-bundles be reduced to U_1-or SO_2-bundles, not that the corresponding SU_2-or SO_3-gauge potentials be also reduced to U_1-or SO_2-gauge potentials.

3) The usual conclusion that the values of magnetic monopoles depend only on the topological properties of the Higgs field holds for the product SU_2-or SO_3-bundle. For the nontrivial SO_3-bundle a new detailed discussion is needed.